Spectre étendu des opérateurs et applications

Hasan Alkanjo

Université Claude Bernard Lyon 1
École doctorale **InfoMath**, ED 512
Spécialité : **Mathématiques**
N. d'ordre 271–2014

Spectre étendu des opérateurs et applications

Thèse de doctorat

Soutenue publiquement le 10 décembre 2014 par

Hasan ALKANJO

devant le Jury composé de :

M. Gilles Cassier	Université de Lyon 1	Directeur de thèse
M. Alfonso M.Rodríguez	Université de Séville	Rapporteur
M. Mübariz Karaev	Université de Süleyman Demirel	Rapporteur
M. Thierry Fack	Université de Lyon 1	
M. Hervé Queffélec	Université de Lille 1	Président du Jury

Résumé de la thèse

Cette thèse s'articule autour d'une notion spectrale assez récente, appelée le spectre étendu des opérateurs.

Dans la première partie nous fournissons des propriétés générales du spectre étendu d'un opérateur dans certains cas particuliers, tels que le cas de dimension finie et celui des opérateurs inversibles.

Nous nous intéressons dans la deuxième partie à l'étude du spectre étendu de l'opérateur shift tronqué S_u. En particulier, nous donnons une description complète des vecteurs propres étendus associés à chaque valeur propre étendue de S_b, où b est un produit de Blaschke quelconque.

Dans la troisième partie nous décrirons complètement le spectre étendu et les sous espaces propres étendus d'une classe d'opérateurs très importante : celle des opérateurs normaux. Nous commençons d'abord par la classe des opérateurs qui sont produits d'un opérateur positif par un autoadjoint. Ensuite, nous utilisons le théorème de Fuglede-Putnam pour déduire une description complète des valeurs et des vecteurs propres étendus des opérateurs normaux, en fonction de leur mesure spectrale.

Dans la dernière partie, nous appliquons nos résultats des trois premières parties sur des exemples concrets. En particulier, nous traitons le problème des sous espaces propres étendus des opérateurs définis dans un espace de dimension finie. Ensuite, nous montrons l'existence d'un opérateur compact quasinilpotent dont le spectre étendu est réduit au singleton $\{1\}$. Enfin, nous traitons deux opérateurs de Cesàro très importants dans les applications.

Mots-clés

Spectre étendu, valeur propre étendu, vecteur propre étendu, espace de Hardy, espace modèle, shift tronqué, opérateur autoadjoint, opérateur normal, opérateur compact quasinilpotent, opérateur de Cesàro.

Extended spectrum of operators and applications

Thesis summary

This thesis is based on a relatively new spectral notion, called extended spectrum of operators.

In the first part, we provide general properties of extended spectrum of an operator in some special cases, such as the case of finite dimension and the case of invertible operator.

We focused in the second part on characterizing the extended spectrum of truncated shift operator S_u. In particular, we give a complete description of the extended eigenvectors associated to each extended eigenvalue of S_b, where b is a Blaschke product.

In the third part, we describe the extended spectrum and the extended eigenvectors of a very important class of operators , that is the normal operators. We first start by describing these last sets for the product of a positive and a self-adjoint operator which are both injective. After, we use the Fuglede-Putnam theorem to describe the same sets for normal operators, in terms of their spectral measure.

In the last part, we apply our results from the last three parts on concrete examples. In particular, we address the problem of extended eigenvectors of operators defined in a finite dimension space. Next, we show the existence of a quasinilpotent compact operator whose extended spectrum is reduced to $\{1\}$. Finally, we study two Cesàro operators which are very important in applications.

Keywords

Extended spectrum, extended eigenvalue, extended eigenvector, Hardy space, model space, truncated shift, self-adjoint operator, normal operator, quasinilpotent compact operator, Cesàro operator.

Remerciements

Ce travail de thèse, je le dois beaucoup à toutes les personnes qui m'ont entouré pendant ces dernières années. A cet effet, je tiens à leur exprimer, mes remerciements les plus sincères.

Tout d'abord, ma plus grande gratitude s'adresse tout particulièrement à mon directeur de thèse, Gilles Cassier, qui m'a choisi ce sujet extrêmement intéressant. Il a toujours fait preuve d'une disponibilité constante, mais aussi d'une aide imparable dans mes démarches depuis mon arrivée en France, qu'elles soient tant administratives que scientifiques. Ses indications, comme ses suggestions au sein du groupe de travail "Analyse Complexe et Théorie des Opérateurs", ont été d'une importance capitale. Cela m'a aussi permis d'acquérir une culture scientifique au-delà de mon sujet de recherche, et m'a donné l'occasion d'améliorer ma façon d'exposer.

En second lieu, je voudrais exprimer mes remerciements les plus profonds à Alfonso M. Rodríguez et Mübariz Karaev, d'avoir accepté d'être rapporteurs, et surtout pour la qualité de leur relecture et le contrôle des résultats figurant dans la thèse.

Mes remerciements s'adressent également à Thierry Fack et Hervé Queffélec, qui me font un grand honneur en participant en tant que membres du jury de ma soutenance.

Je tiens aussi à remercier mes collègues du groupe de travail, je cite entre autres : Haykel Gaaya, Jérôme Verliat et Abdelouahab Mansour, pour les discussions drôles et sympathiques pendant les pauses café.

Je n'oublierai pas les aides permanentes reçues par la directrice du laboratoire, Mme. Elisabeth Mironescu, je la remercie beaucoup pour sa gentillesse et sa disponibilité.

Une pensée aussi pour les doctorants et enseignants avec qui j'ai partagé de bons moments, notamment mes collègues de bureau : Corentin, Elodie, Sylvain, Nadja, Xiaolin, Benjamin, Mathias, Maxime et Simon.

Je remercie du fond du cœur, ma famille, mes très chers parents, mes frères et sœurs, ainsi que mes amis, tout particulièrement Muath et Abou Jamil. Ils m'ont tous largement aidé et soutenu tout au long des diverses épreuves de ces trois dernières années.

Mes derniers remerciements et non les moindres, s'adressent à ma chère femme Ryme, qui pour mon plus grand bonheur partage ma vie et mes expériences professionnelles depuis leurs origines. Elle est simplement la clef de ma réussite, le pilier de toutes mes constructions et la base de tous mes projets.

Finalement, je voudrais dédier ce travail de recherche à la mémoire des milliers de Syriens qui ont sacrifié leur vie pour la liberté de la Syrie et pour la contruction d'une démocratie dans ce pays, mais surtout à plus de trois millions d'enfants privés de leurs écoles pour la quatrième année consécutive.

Table des matières

1 Introduction **9**

2 Préliminaires et propriétés générales **15**

2.1 Spectre étendu des opérateurs 15

2.1.1 Relation avec le spectre ponctuel 17

2.1.2 Cas d'opérateurs inversibles 17

2.1.3 Puissances d'opérateurs 19

2.1.4 Cas de dimension finie 20

2.2 Espaces modèles 21

2.3 Densité de $\mathbb{C}[X]$ dans $L^2(K)$ 23

3 Spectre étendu de shifts tronqués **27**

3.1 Opérateurs de Toeplitz 27

3.1.1 Entrelacement entre des opérateurs de Toeplitz 27

3.1.2 Spectre étendu du Shift 30

3.2 Spectre étendu de S_u 33

3.3 Spectre étendu de S_b 35

3.3.1 Cas de produits de Blaschke finis 38

3.3.2 Cas de produits de Blaschke quelconques 39

4 Spectre étendu des opérateurs normaux **45**

4.1 Produit d'opérateurs autoadjoints 45

4.2 Opérateurs normaux 57

5 Applications et exemples **61**
5.1 Cellules de Jordan 61
5.2 Opérateurs compacts quasinilpotents 68
5.3 Opérateurs de Cesàro 75

Chapitre 1

Introduction

Cette thèse s'inscrit dans le domaine de la théorie des opérateurs, qui traite les endomorphismes continus d'un espace vectoriel normé. Cette théorie est surtout développée dans le cas des espaces de Hilbert. Dans toute notre étude, $\mathcal{H}$ signifiera un espace de Hilbert complexe et séparable. On notera aussi par $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ l'algèbre des opérateurs linéaires bornés définis sur $\mathcal{H}$.

Notre thèse sera consacrée à l'étude d'une notion spectrale assez récente, appelée le spectre étendu des opérateurs. Soit $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, on dit qu'un nombre complexe λ est une valeur propre étendue de l'opérateur T, s'il existe un opérateur $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})\backslash\{0\}$ tel que $TX = \lambda XT$. Dans ce cas, l'opérateur X est dit le vecteur propre étendu associé à λ. On appelle spectre étendu de T l'ensemble de toutes les valeurs propres étendues de T, et on le notera par $\sigma_{ext}(T)$. Notons aussi par $E_{ext}(T, \lambda)$ (ou simplement $E_{ext}(\lambda)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté) le sous-espace propre étendu associé à $\lambda \in \sigma_{ext}(T)$.

Ces dernières notions se trouvent au carrefour de plusieurs thèmes de recherches en théorie des opérateurs, comme nous allons le voir dans la suite.

Dans [4], A. Biswas, A. Lambert et S. Petrovic ont introduit cette notion en montrant que le spectre étendu d'un opérateur T à image dense, correspond au spectre ponctuel d'un autre opérateur (non-borné en général) construit à partir de T. En effet, Soient $T, X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ et supposons qu'il existe un opérateur $Y \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tel que

$$TX = XY. \tag{1.1}$$

Notons ensuite par Δ_T l'ensemble de tous les opérateurs $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ pour lesquels il existe un opérateur $Y \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ vérifiant (1.1). On vérifie facilement que ce dernier ensemble forme une algèbre. Si de plus T est à image dense, on peut définir l'application

$$\begin{array}{cccc} \Phi_T & : & \Delta_T & \to & \mathcal{B}(\mathcal{H}) \\ & & X & \mapsto & Y, \end{array}$$

qui est un homomorphisme d'algèbre fermé. Supposons maintenant que pour l'opérateur $X \neq 0$, il existe un nombre complexe λ tel que $Y = \lambda X$, on obtient alors l'équation $TX = \lambda XT$, ou l'égalité équivalente $\Phi_T(X) = \lambda X$. Par conséquent, un nombre complexe λ est une valeur propre étendue de l'opérateur T si et seulement si λ est une valeur propre de l'opérateur (non-borné) Φ_T.

Dans ce même article, les auteurs considèrent l'opérateur (compact quasinilpotent) de Volterra défini sur l'espace de Hilbert $L^2[0,1]$, par

$$Vf(x) = \int_0^x f(t)dt,$$

et ils montrent que $\sigma_{ext}(V) =]0, +\infty[$, en donnant une solution non-triviale de l'équation $VX = \lambda XV$. Par contre, nous constatons qu'ils ne donnent pas toutes les solutions de cette dernière équation. Cette remarque s'avérera pertinente, elle sera l'objet de notre motivation, et nous consacrerons notre travail à la description complète de l'ensemble des vecteurs propres étendus de certaines classes d'opérateurs classiques et très utilisées, telles que les opérateurs normaux et les shifts tronqués agissant sur les espaces modèles.

Une deuxième approche du spectre étendu d'un opérateur, se manifeste en regardant la définition de cet ensemble comme un cas particulier de l'équation opératorielle de Sylvester $TX - XS = Q$, en posant $S = \lambda T$ et $Q = 0$. Dans [39], M. Rosenblum a montré que si $\sigma(T) \cap \sigma(S) = \emptyset$, alors $X = 0$ est l'unique solution de l'équation $TX - XS = 0$, ce qui implique l'inclusion importante suivante

$$\sigma_{ext}(T) \subset \{\lambda \in \mathbb{C}, \quad \sigma(T) \cap \sigma(\lambda T) \neq \emptyset\}.$$

Une telle inclusion va se transformer en une égalité dans le cas où $\mathcal{H}$ est de dimension finie (voir [5]).

On peut obtenir une autre approche de la définition du spectre étendu en la considérant comme un cas particulier de la définition de l'entrelacement entre deux opérateurs. Soient $T, S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, on dit que S s'entrelace avec T, et on le note $S \propto T$ s'il existe un opérateur $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \backslash \{0\}$ tel que $XS = TX$. Remarquons que si $S = \lambda T$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{C}$, on obtient la définition du spectre étendu de l'opérateur T. Cette notion a été introduit dans les années soixante, et de nombreux résultats ont été obtenus depuis (voir par exemple [6] et [19]).

Dans [5], A. Biswas et S. Petrovic ont complètement décrit l'ensemble du spectre étendu d'un opérateur $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, avec $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert de dimension finie. Plus précisément, ils ont montré que dans ce cas

$$\sigma_{ext}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}, \quad \sigma(T) \cap \sigma(\lambda T) \neq \emptyset\}.$$

En revanche, les deux auteurs n'ont pas abordé le problème de l'ensemble des vecteurs propres associés à chaque valeur propre étendue d'un tel opérateur. Dans le chapitre 5, nous appliquons les résultats de ces deux derniers auteurs pour décrire les sous espaces propres étendus d'une large classe d'opérateurs définis sur un espace de Hilbert de dimension finie. Une autre application fondamentale de cet article apparaît dans le chapitre 3. En particulier, on décrit complètement les ensemble des valeurs et des vecteurs propres étendus du shift tronqué défini sur un espace modèle de dimension finie. En plus,

En dimension infinie, la situation est loin d'être simple. Dans [30], A. Lambert a abordé le cas des opérateurs inversibles, en montrant qu'il existe dans ce cas deux constantes $0 < a < b < \infty$ telles que

$$\sigma_{ext}(T) \subset \{z \in \mathbb{C} : a \leq |z| \leq b\}.$$

Nous déterminerons dans le chapitre 2 ces deux dernières constantes .

Dans [6], Bourdon et Shapiro se sont basés sur les propriétés d'entrelacement entre les opérateurs de Toeplitz, trouvées par J. A. Deddens dans [18] et [19], pour déterminer l'ensemble du spectre étendu de certains opérateurs de Toeplitz plus généraux que le shift $S = T_z$. Par exemple, ils ont montré que $\sigma_{ext}(T_{z+1}) = [1, \infty)$, $\sigma_{ext}(T_{z+2}) = \sigma_{ext}(T_{z^2+2}) = \{1\}$, et que si $\varphi(z) = z^2 + z$, alors $\sigma_{ext}(T_\varphi) = \{1\} \cup (\mathbb{C}\backslash\{-4\varphi(\mathbb{D})\})$. Cependant, dans aucun des cas ils n'ont déterminé les sous-espaces propres étendus.

En revenant à l'article [5], les auteurs utilisent le fameux théorème du relèvement des commutants de Sz.-Nagy-Foias, pour donner la relation entre le spectre étendu d'une contraction et celui de son relèvement isométrique. Une première application directe et fondamentale de ce résultat, est de décrire le spectre étendu de l'opérateur shift tronqué S_u (où $u(z) = b(z)s(z)$ est une fonction intérieure dont b est la partie produit de Blaschke, et s est la partie singulière) défini sur l'espace modèle $K_u^2 := H^2 \ominus uH^2$, à partir de l'ensemble bien connu du spectre étendu de son relèvement isométrique, à savoir l'opérateur shift S défini sur l'espace de Hardy H^2. En revanche, les deux auteurs n'abordent pas le problème des sous-espaces propres étendus. Dans le chapitre 3, nous allons considérer la fonction intérieure $u = b$, avec b un produit de Blaschke quelconque, défini par (2.6), et on retrouve dans ce cas le résultat de A. Biswas et S. Petrovic, sans passer par le théorème du relèvement des commutants de Sz.-Nagy-Foias. En fait, nous utiliserons une approche directe basée sur la théorie des fonctions dans l'espace de Hardy. De plus, nous décrirons complètement l'ensemble de tous les vecteurs propres étendus associés à chaque valeur propre étendue de S_b.

Un autre exemple décrivant de manière complète les sous espaces propres étendus d'un opérateur, se trouve dans l'article de M. T. Karaev [25]. L'auteur s'est basé sur le résultat de A. Biswas, A. Lambert et S. Petrovic dans [4], qui affirme que $\sigma_{ext}(V) =]0, \infty[$. Dans ce cas, il a complètement décrit l'ensemble $E_{ext}(\lambda)$ pour chaque $\lambda \in]0, \infty[$. Dans le chapitre 5, nous nous baserons sur le résultat (voir chapitre 2) donnant la densité de l'ensemble des polynômes $\mathbb{C}[X]$ (définis sur

$K := [0,1] \cup [0,\lambda]$, avec $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_+$) dans $L^2(K)$. Ceci nous permettra de retrouver à la fois le dernier résultat de A. Biswas, A. Lambert et S. Petrovic (ce que M. T. Karaev ne fait pas dans son article), mais aussi le résultat de M.T. Karaev.

Dans le chapitre 4, nous décrirons complètement le spectre étendu et les sous espaces propres étendus d'une classe d'opérateurs très importante : celle des opérateurs normaux. Nous traiterons aussi les classes des opérateurs qui sont produits d'un opérateur positif par un autoadjoint. Ensuite, nous déduirons une description complète des valeurs et des vecteurs propres étendus des opérateurs autoadjoints, en fonction de leur mesure spectrale. Enfin, nous traiterons le cas des opérateurs normaux à l'aide du théorème de Fuglede-Putnam. Nous donnons une description complète des ensembles des valeurs propres et des vecteurs propres étendus d'un opérateur normal agissant sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, en fonction de sa mesure spectrale. Ces travaux sont issu d'une collaboration avec G. Cassier (voir [12]).

Le chapitre 5 sera consacré à l'étude d'exemples des opérateurs concrets. Nous commencerons ainsi par décrire les sous espaces propres étendus d'une large classe d'opérateurs agissant sur un espace de Hilbert de dimension finie. Nous montrons ensuite l'existence d'un opérateur compact quasinilpotent ayant un spectre étendu trivial. En particulier, nous décrirons complètement le spectre étendu et les sous espaces propres étendus de l'opérateur de Volterra. Enfin, nous travaillerons sur deux opérateurs de Cesàro qui ont été étudiés dans [29]. En particulier, nous rétablirons les résultats des auteurs de ce dernier article, en décrivant en plus l'ensemble des sous espaces propres étendus des deux opérateurs (voir [11]).

Chapitre 2

Préliminaires et propriétés générales

2.1 Spectre étendu des opérateurs

Définition 2.1. *On dit qu'un nombre complexe λ est une valeur propre étendue de l'opérateur $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, s'il existe un opérateur $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})\backslash\{0\}$ tel que $TX = \lambda XT$. Dans ce cas, l'opérateur X est dit vecteur propre étendu de T associé à λ.*

On appelle spectre étendu de T l'ensemble de toutes les valeurs propres étendues de T, et on le note par $\sigma_{ext}(T)$. Notons aussi par $E_{ext}(T, \lambda)$ (ou simplement par $E_{ext}(\lambda)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté) le sous-espace propre étendu associé à $\lambda \in \sigma_{ext}(T)$. Remarquons de plus que 1 appartient à $\sigma_{ext}(T)$ pour tout $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, avec $X = I$ comme vecteur propre étendu associé.

Tout d'abord, on aura besoin du théorème fondamental suivant dû à Rosenblum [39].

Théorème 2.2. *Soient A, B deux opérateurs de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ tels que $\sigma(A) \cap \sigma(B) = \emptyset$. Alors $X = 0$ est l'unique solution de l'équation opératorielle $AX - XB = 0$.*

Démonstration. Pour montrer ce théorème, on va considérer l'équation opératorielle suivante $AX - XB = Q$, avec $Q \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Par hypothèse, il existe un ensemble relativement compact D dont la frontière ∂D forme une courbe de Jordan, et tel que $\sigma(B) \subset D$ et $\sigma(A) \cap \overline{D} = \emptyset$. Supposons maintenant que X soit une solution de l'équation considérée, et soit $z \in \partial D$, i.e. $z \in \rho(A) \cap \rho(B)$. On a donc l'équation

$$(A - zI)X + X(zI - B) = Q,$$

qui entraîne

$$(A - zI)^{-1}X + X(zI - B)^{-1} = (A - zI)^{-1}Q(zI - B)^{-1} \tag{2.1}$$

D'après les propriétés du calcul fonctionnel de Dunford (cf. [22]), on a que

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\partial D}(A - zI)^{-1}Xdz = 0 \quad et \quad \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial D}X(zI - B)^{-1}dz = X.$$

Ainsi, (2.1) implique :

$$X = -\frac{1}{2i\pi}\int_{\partial D} R_z(A)QR_z(B)dz.$$

En posant $Q = 0$, on obtient le résultat. $\square$

En remplaçant dans le dernier théorème $A = T$, $B = \lambda T$, on obtient de manière directe la proposition suivante.

Proposition 2.3. *Soit $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, alors*

$$\sigma_{ext}(T) \subset \{\lambda \in \mathbb{C}, \quad \sigma(T) \cap \sigma(\lambda T) \neq \emptyset\}.$$

En particulier, si $\sigma(T) = \{\alpha\}$, avec $\alpha \neq 0$, alors $\sigma_{ext}(T) = \{1\}$.

De là, on en déduit immédiatement le corollaire ci-dessous.

Corollaire 2.4. *Supposons que $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ soit un opérateur quasinilpotent, alors*

$$\sigma_{ext}(\alpha I + T) = \{1\}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}\backslash\{0\}.$$

2.1.1 Relation avec le spectre ponctuel

La proposition suivante donne une relation entre le spectre étendu d'un opérateur et son spectre ponctuel.

Proposition 2.5. *Soit $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Si l'on note par $\sigma_p(T)$ le spectre ponctuel de T, alors on a*

$$\{\frac{\alpha}{\bar{\beta}},\ \alpha \in \sigma_p(T),\ \beta \in \sigma_p(T^*)\} \subset \sigma_{ext}(T).$$

Démonstration. Supposons que $\alpha \in \sigma_p(T)$ et que $\beta \in \sigma_p(T^*)$, alors il existe $x, y \in \mathcal{H}\backslash\{0\}$ tels que $Tx = \alpha x$ et $T^*y = \beta y$. Si l'on définit l'opérateur $X = x \otimes y$ par

$$(x \otimes y)z =< z, y > x \quad \forall z \in \mathcal{H},$$

on vérifie alors que X est un vecteur propre étendu pour T associé à la valeur $\alpha/\bar{\beta}$. Donc $\alpha/\bar{\beta} \in \sigma_{ext}(T)$. □

Remarque 2.6. *1- Notons que si $0 \in \sigma_p(T) \cap \sigma_p(T^*)$, alors $\sigma_{ext}(T) = \mathbb{C}$. En effet, il existe dans ce cas $x, y \in \mathcal{H}\backslash\{0\}$ tels que $Tx = T^*y = 0$. Alors l'opérateur $X = x \otimes y$ vérifie $TX = \lambda XT = 0$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$.*

2- Si $1 \in \sigma_p(T^*)$ alors $\sigma_p(T) \subset \sigma_{ext}(T)$, une inclusion qui n'est pas vraie en général. En effet, si $T = \lambda I$, alors $\sigma_p(T) = \{\lambda\}$ tandis que $\sigma_{ext}(T) = \{1\}$.

2.1.2 Cas d'opérateurs inversibles

Remarquons tout d'abord que 0 ne peut pas être valeur propre étendu d'un opérateur inversible (voire injectif). Dans [30], A. Lambert a montré que le spectre étendu d'un tel opérateur est situé dans un anneau fermé et borné de centre 0. Dans la proposition suivante, on donne en plus les bornes de cet anneau.

Proposition 2.7. *Soit $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ inversible, et posons $a := \|T\|\|T^{-1}\|$. Alors*

1. $\sigma_{ext}(T) \subset \{z \in \mathbb{C} : \frac{1}{a} \leq |z| \leq a\} := A_{\frac{1}{a},a}$.

2. *Si* $\lambda \in \sigma_{ext}(T)$ *avec* $|\lambda| \neq 1$*. Alors il existe un entier* $N > 1$ *tel que tout produit de* N *éléments de* $E_{ext}(\lambda)$ *est nul. En particulier, tout élément de* $E_{ext}(\lambda)$ *est un opérateur nilpotent de rang* N *au plus.*

Démonstration. 1) Comme T est inversible, il existe une constante $c > 0$ ($c = \|T^{-1}\|^{-1}$) telle que pour tout $x \in \mathcal{H}$, $\|Tx\| \geq c\|x\|$. Soient $\lambda \in \sigma_{ext}(T)$ et $X \in E_{ext}(\lambda) \setminus \{0\}$, alors

$$TX = \lambda XT.$$

Il en résulte que

$$c\|Xx\| \leq \|TXx\| = |\lambda|\|XTx\| \leq |\lambda|\|X\|\|Tx\|, \ \forall x \in \mathcal{H}.$$

Il s'en suit que

$$c\|X\| \leq |\lambda|\|X\|\|T\|,$$

de fait, $|\lambda| \geq \frac{1}{a}$.

Quant à la deuxième inégalité, si $\lambda \in \sigma_{ext}(T)$ ($\lambda \neq 0$) alors $1/\lambda \in \sigma_{ext}(T^{-1})$. On obtient d'une manière analogue

$$|\frac{1}{\lambda}| \geq \frac{1}{a}$$

ou bien $|\lambda| \leq a$. La première assertion est alors prouvée.

2) Soit $\lambda \in \sigma_{ext}(T)$ tel que $|\lambda| \neq 1$, on peut alors trouver un entier $N > 1$ tel que $\lambda^N \notin A_{\frac{1}{a},a}$ et $\lambda^{N-1} \in A_{\frac{1}{a},a}$. Soient $X_1, ..., X_N \in E_{ext}(\lambda)\backslash\{0\}$, alors

$$TX_1...X_N = \lambda^N X_1...X_N T,$$

ce qui implique forcément $X_1...X_N = 0$.

□

2.1.3 Puissances d'opérateurs

Dans ce paragraphe on donne la relation entre le spectre étendu d'un opérateur et celui de ses puissances. Soit $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, et supposons que $\lambda \in \sigma_{ext}(T)$ avec X pour vecteur propre étendu associé, c'est-à-dire,

$$TX = \lambda XT.$$

Alors, pour tout entier naturel n,

$$T^n X = \lambda^n X T^n.$$

Par conséquent, $\lambda \in \sigma_{ext}(T)$ implique que $\lambda^n \in \sigma_{ext}(T^n)$. A. Biswas et S. Petrovic ont montré dans [5] l'implication dans le sens inverse. Pour montrer cela, on définit l'application

$$\begin{array}{rcccc} F_\lambda & : & \mathcal{B}(\mathcal{H}) & \to & \mathcal{B}(\mathcal{H}) \\ & & X & \mapsto & TX - \lambda XT, \end{array}$$

On aura d'abord besoin du lemme suivant. Pour la preuve on renvoie à [5].

Lemme 2.8. *Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, et soit μ l'une des racines n'ième de λ. Si l'on note par ω la n'ième racine primitive de l'unité, i.e. $\omega := e^{2\pi i/n}$, alors*

$$T^n X - \lambda X T^n = F_{\mu\omega^{n-1}} \circ F_{\mu\omega^{n-2}} \circ ... \circ F_{\mu\omega} \circ F_\mu(X).$$

On peut maintenant montrer le résultat fondamental de ce paragraphe.

Théorème 2.9. *Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors $\lambda \in \sigma_{ext}(T^n)$ si et seulement s'il existe une racine n'ième de λ appartenant à $\sigma_{ext}(T)$.*

Démonstration. Remarquons que $\lambda \in \sigma_{ext}(T)$ implique facilement que $\lambda^n \in \sigma_{ext}(T^n)$. Réciproquement, soit $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \setminus \{0\}$ tel que $T^n X = \lambda X T^n$, et soit μ une racine n'ième de λ. D'après le lemme précédent,

$$0 = T^n X - \lambda X T^n = F_{\mu\omega^{n-1}} \circ F_{\mu\omega^{n-2}} \circ ... \circ F_{\mu\omega} \circ F_\mu(X).$$

Si $F_\mu(X) = 0$, alors $\mu \in \sigma_{ext}(T)$ et le théorème sera prouvé. Sinon, supposons que m soit le plus petit entier naturel vérifiant

$$F_{\mu\omega^m} \circ F_{\mu\omega^{m-1}} \circ ... \circ F_{\mu\omega} \circ F_\mu(X) = 0,$$

alors

$$Y := F_{\mu\omega^{m-1}} \circ F_{\mu\omega^{m-2}} \circ ... \circ F_{\mu\omega} \circ F_\mu(X) \neq 0 \text{ } et \text{ } F_{\mu\omega^m}(Y) = 0.$$

Ainsi, Y est un vecteur propre étendu de T associé à $\mu\omega^m$. Or $(\mu\omega^m)^n = \lambda$, la preuve est alors achevée. □

2.1.4 Cas de dimension finie

Dans ce paragraphe on décrit complètement le spectre étendu d'un opérateur agissant sur un espace de Hilbert complexe de dimension finie.

Théorème 2.10. *Soit T un opérateur sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ de dimension finie. Alors*

$$\sigma_{ext}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}, \sigma(T) \cap \sigma(\lambda T) \neq \emptyset\}.$$

Démonstration. Considérons dans la preuve les deux cas suivants :

Supposons dans le premier cas que T ne soit pas inversible, alors le noyau de T et celui de T^* ne sont pas réduits à $\{0\}$. On peut donc considérer un opérateur $X \neq 0$ de $kerT^*$ dans $kerT$. Posons ensuite $X' = XP$, où P est le projecteur orthogonal de $\mathcal{H}$ sur $kerT^*$ $(X' \neq 0)$. Par conséquent

$$TX' = \lambda X'T = 0, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C},$$

d'où, $\sigma_{ext}(T) = \mathbb{C}$. De plus, et comme T n'est pas inversible, alors $0 \in \sigma(T) \cap \sigma(\lambda T)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$. On en déduit que

$$\sigma_{ext}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}, \quad \sigma(T) \cap \sigma(\lambda T) \neq \emptyset\} = \mathbb{C}.$$

Supposons maintenant que T soit inversible, i.e. $0 \notin \sigma(T)$. Étant donné $\lambda \in \mathbb{C}$, et grâce à la proposition 4.1.2, il suffit de montrer que

$$\{\lambda \in \mathbb{C}, \quad \sigma(T) \cap \sigma(\lambda T) \neq \emptyset\} \subset \sigma_{ext}(T).$$

Supposons pour cela que $\beta \in \sigma(T) \cap \sigma(\lambda T)$, il existe donc un vecteur propre $a \in \mathcal{H}$ tel que $Ta = \beta a$ (forcément $\beta \neq 0$, et par conséquent $\lambda \neq 0$). De même, et vu que $(\beta/\lambda) \in \sigma(T)$, il suit $\overline{(\beta/\lambda)} \in \sigma(T^*)$, il existe alors un vecteur propre $b \in \mathcal{H}$ tel que $T^*b = \overline{(\beta/\lambda)}b$. Posons finalement $X = a \otimes b$, on vérifie alors facilement l'égalité $TX = \lambda XT$, avec $X \neq 0$. Ce qui entraîne $\lambda \in \sigma_{ext}(T)$.

$\square$

On peut immédiatement en déduire les résultats suivants.

Corollaire 2.11. *Soit T un opérateur linéaire agissant sur un espace de Hilbert de dimension finie, alors :*

1. $\sigma_{ext}(T) = \{1\}$ *si et seulement si* $\sigma(T) = \{\alpha\}$, *avec* $\alpha \neq 0$.
2. $\sigma_{ext}(T) = \mathbb{C}$ *si et seulement si T n'est pas inversible.*
3. *Si T est inversible, alors* $\sigma_{ext}(T) = \{\alpha/\beta, \quad \alpha, \beta \in \sigma(T)\}$.

Dans le chapitre 5, on va donner un exemple concret du cas de dimension finie. En particulier, on va décrire le spectre étendu et les sous espaces propres étendus de quelques cellules de Jordan.

2.2 Espaces modèles

Effectuons tout d'abord un bref rappel sur la théorie classique des espaces de Hardy. Notons par $\mathbb{D}$ et $\mathbb{T}$ le disque unité ouvert et le cercle unité respectivement, et par $dm(t)$ la mesure de Lebesgue normalisée sur $\mathbb{T}$. Considérons ensuite l'espace $L^2(\mathbb{T})$ des fonctions f mesurables sur $\mathbb{T}$, à valeurs complexes et pour lesquelles

$$\|f\|_2 = \left(\int_{\mathbb{T}} |f|^2 dm\right)^{1/2} < +\infty.$$

On montre alors que l'espace $L^2(\mathbb{T})$ muni du produit scalaire suivant :

$$\begin{array}{cccc} <,> & : & L^2(\mathbb{T}) \times L^2(\mathbb{T}) & \to & \mathbb{C} \\ & & (f,g) & \mapsto & \int_{\mathbb{T}} f\bar{g}\,dm, \end{array}$$

est un espace de Hilbert. L'espace de Hardy $H^2(\mathbb{T})$ est donc défini comme le sous-espace fermé de $L^2(\mathbb{T})$, formé des fonctions dont les coefficients de Fourrier d'indice négatifs sont nuls. On définit aussi l'espace de Hardy $H^2(\mathbb{D})$ comme l'espace de Hilbert des fonctions $f \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D})$ pour lesquelles

$$\|f\|_2 = \sup_{0\leq r<1} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{it})|^2 dm(t)\right)^{1/2} < +\infty.$$

Comme une fonction de $H^2(\mathbb{D})$ admet des limites radicales presque partout, alors d'après la théorie classique des espaces de Hardy, on peut identifier les espaces $H^2(\mathbb{D})$ et $H^2(\mathbb{T})$.

Si on note par S le shift unilatéral défini sur H^2 par $f \mapsto zf$, son adjoint va être défini par

$$S^* f = \frac{f - f(0)}{z}. \tag{2.2}$$

Soit u une fonction intérieure, i.e., une fonction holomorphe bornée sur $\mathbb{D}$, et telle que :

$$|u^*(e^{it})| := \lim_{r\to 1^-} |u(re^{it})| = 1, \; m - p.p.$$

Supposons dans la suite que u ne soit pas constante. D'après un théorème de A. Beurling, l'espace $K_u^2 := H^2 \ominus uH^2$, appelé l'espace modèle, est un sous-espace propre de H^2 invariant par rapport à l'opérateur S^*. Par conséquent, si l'on note par S_u la compression de S sur K_u^2, son adjoint S_u^* va être la restriction de S^* sur ce dernier espace.

Soit $\lambda \in \mathbb{D}$, et notons par k_λ le noyau reproduisant dans H^2 ; il est explicitement donné par

$$k_\lambda(z) = \frac{1}{1 - \overline{\lambda} z}. \tag{2.3}$$

Soit P_u la projection orthogonale de $L^2(\mathbb{T})$ sur K_u^2. Le noyau reproduisant dans l'espace K_u^2 est alors donné par

$$k_\lambda^u(z) := P_u k_\lambda = \frac{1 - \overline{u(\lambda)} u(z)}{1 - \overline{\lambda} z}. \tag{2.4}$$

Il se trouve que l'espace modèle K_u^2 est de dimension finie si et seulement si u est un produit de Blaschke fini

$$b(z) = \prod_{i=1}^{n} b_{\alpha_i}^{p_i}, \ avec \ b_\lambda = \frac{\lambda - z}{1 - \overline{\lambda} z}, \ p_i, n \in \mathbb{N}^*, \ et \ \alpha_i \neq \alpha_j \ \forall i \neq j. \quad (2.5)$$

Dans le cas général, un produit de Blaschke infini est défini par

$$b(z) = \prod_{i=1}^{\infty} (\frac{\overline{\alpha_i}}{|\alpha_i|} b_{\alpha_i})^{p_i}, \ p_i \in \mathbb{N}^*, \ avec \ \sum_{i=1}^{\infty} (1 - |\alpha_i|) < +\infty, \qquad (2.6)$$

et on a le résultat suivant, pour la preuve on renvoie à [42].

Proposition 2.12. *Soit b un produit de Blaschke défini par (2.6), alors les noyaux de Cauchy*

$$e_{i,l}(z) = \frac{l! z^l}{(1 - \overline{\alpha_i} z)^{l+1}}, \ \forall i \geq 1, \quad l = 0, ..., p_i - 1, \qquad (2.7)$$

engendrent l'espace K_b^2. De plus, ces derniers noyaux forment une base de Riesz de K_b^2 si et seulement si la suite des zéros $\{\alpha_i\}_{i \geq 1}$ vérifie la condition de Carleson suivante :
Il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $j \in \mathbb{N}^*$

$$\prod_{i \neq j} \left| \frac{\alpha_i - \alpha_j}{1 - \overline{\alpha_i} \alpha_j} \right| \geq \delta.$$

Les espaces de Hardy et les espaces modèles possèdent des propriétés remarquables, et nous renvoyons à [34], [35] et [36] pour plus de détails.

2.3 Densité de $\mathbb{C}[X]$ dans $L^2(K)$

Dans ce paragraphe, on considère l'ensemble $K := [0, 1] \cup [0, \lambda]$ tel que $\lambda \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}_+$, et on montre dans le théorème 2.15 que l'ensemble des polynomes définis sur cet ensemble est dense dans $L^2[0, 1]$. Comme on le verra dans la suite, ce théorème sera très utile dans les applications.

Tout d'abord on rappelle le théorème de Cauchy-Pompeiu suivant.

Théorème 2.13. *Soit* Γ *un système fini de courbes de Jordan de classe* C^1*, et notons par* $U = Int(\Gamma)$*. Soit* f *une fonction de classe* C^∞ *sur* U *et continue sur* $\overline{U}$*, alors pour tout* $z \in U$ *on a*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}dw - \frac{1}{\pi}\iint_U \frac{\partial f}{\partial \bar{w}}(w)\frac{dm_2(w)}{w-z},$$

où m_2 *signifie la mesure de Lebesgue dans le plan.*

On aura encore besoin du lemme suivant.

Lemme 2.14. *Soit* $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_+$*, et notons par* $\mathcal{A}$ *la fermeture de* $\mathbb{C}[X]$ *dans l'espace* $C(K)$*, i.e.,* $\mathcal{A} = \overline{\mathbb{C}[X]}^{C(K)}$*. Soit* ε_1 *le polynôme identité, i.e.,* $\varepsilon_1(z) = z$ *pour tout* z*. Alors* $\sigma_{\mathcal{A}}(\varepsilon_1) = K$*.*

Démonstration. Puisque $\mathcal{A} \subset C(K)$, on a clairement

$$K = \sigma_{C(K)}(\varepsilon_1) \subset \sigma_{\mathcal{A}}(\varepsilon_1) \ \ et \ \ \partial\sigma_{\mathcal{A}}(\varepsilon_1) \subset \partial\sigma_{C(K)}(\varepsilon_1) = K.$$

Raisonnons alors par l'absurde en supposant que $w \in \sigma_{\mathcal{A}}(\varepsilon_1)\backslash K$. Soit $J = \{tw : t \geq 1\}$, alors $J \cap K = \emptyset$ et J s'intersecte à la fois avec $\sigma_{\mathcal{A}}(\varepsilon_1)$ et $(\sigma_{\mathcal{A}}(\varepsilon_1))^c$. Or J est connexe, il existe alors $v \in J \cap \partial\sigma_{\mathcal{A}}(\varepsilon_1) \subset K$, ce qui est absurde. □

On peut maintenant montrer le résultat principal de ce paragraphe, qui se trouve (avec le dernier lemme) dans [12].

Théorème 2.15. *Soient* $f, g \in L^2[0,1]$ *et* $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_+$*. Alors il existe une suite de polynômes* $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définis sur* K*, telle que pour tout* $t \in [0,1]$

$$p_n(t) \to f(t) \ et \ p_n(\lambda t) \to g(t),$$

dans $L^2[0,1]$.

Démonstration. Soit $f \in L^2(K)$ tel que $f \perp \mathcal{A}$. D'après le lemme (2.14), $(z-w)^{-1} \in \mathcal{A}$ pour tout $w \notin K$. Alors

$$\int_K \frac{\overline{f(z)}}{z-w}d\mu(z) = 0, \ \forall w \notin K,$$

où μ désigne la mesure de la longueur. Soit maintenant $\phi_\epsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ à support compact $\overline{U} = D(0, R]$, alors

$$\iint_U \frac{\partial \phi_\epsilon}{\partial \bar{w}}(w) \left(\int_K \frac{\overline{f(z)}}{w - z} d\mu(z) \right) dm_2(w) = 0.$$

Par le théorème de Fubini, on a

$$\int_K \left(\iint_U \frac{\partial \phi_\epsilon}{\partial \bar{w}}(w) \frac{dm_2(w)}{w - z} \right) \overline{f(z)} d\mu(z) = 0.$$

En utilisant le théorème de Cauchy-Pompeiu, on obtient

$$\int_K \phi_\epsilon(z) \overline{f(z)} d\mu(z) = 0.$$

Alors le choix arbitraire de ϕ_ϵ entraîne

$$\int_a^b \overline{f(t)} dt = 0, \ et \ \int_{\lambda a}^{\lambda b} \overline{f(z)} d\mu(z) = 0, \ \forall a, b \in [0, 1],$$

d'où $f = 0$, ce qui achève la preuve.

$\square$

Chapitre 3

Spectre étendu de shifts tronqués

3.1 Opérateurs de Toeplitz

Commençons par rappeler la définition d'un opérateur de Toeplitz.

Définition 3.1. *L'opérateur $T \in \mathcal{B}(H^2)$ est dit opérateur de Toeplitz s'il est la compression sur H^2 d'un certain opérateur de multiplication de $L^2(\mathbb{T})$. Autrement dit, T est un opérateur de Toeplitz s'il existe une fonction $\phi \in L^2(\mathbb{T})$, dite le symbole de T, telle que $T = PM_\phi$ où P est la projection orthogonale de $L^2(\mathbb{T})$ sur H^2. Dans ce cas, on note $T = T_\phi$.*

Il se trouve que cette opérateur est borné si et seulement si $\phi \in L^\infty(\mathbb{T})$. Cette classe d'opérateurs a été étudiée en détail par Brown et Halmos (cf. [7]). Remarquons enfin que le shift unilatéral S est un opérateur de Toeplitz de symbole z.

3.1.1 Entrelacement entre des opérateurs de Toeplitz

Définition 3.2. *Soient $A, B \in \mathcal{B}(H^2)$ et $X \in \mathcal{B}(H^2)\backslash\{0\}$. On dit que A s'entrelace avec B, et on le note $A \propto B$ s'il existe un opérateur*

$X \in \mathcal{B}(H^2)\backslash\{0\}$ *tel que* $XA = BX$.

Remarque 3.3. *Soit* $\lambda \in \mathbb{C}$. *En remplaçant* A *par* λB *dans la définition précédente, on retrouve la définition du spectre étendu de l'opérateur* B. *D'où l'intérêt de cette notion pour notre étude.*

Dans [18] et [19], J. A. Deddens a étudié l'entrelacement entre deux opérateurs de Toeplitz bornés de symboles analytiques, et il a donné des résultats qui seront très utiles par la suite pour déterminer le spectre étendu de tels opérateurs.

Commençons par le lemme fondamental suivant.

Lemme 3.4. *Soit* Λ *un sous-ensemble non-dénombrable de* $\mathbb{D}$. *Alors l'ensemble* $\{k_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ *engendre l'espace* H^2.

Démonstration. Soit $f \in H^2$, et supposons que f soit orthogonale à l'ensemble $\{k_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$. Alors, pour tout $\lambda \in \Lambda$

$$f(\lambda) =< f, k_\lambda >= 0.$$

Or Λ est non-dénombrable, et f est analytique, donc $f \equiv 0$ d'après le principe des zéros isolés, ce qui achève la preuve. $\square$

Théorème 3.5. *Soient* $\varphi, \psi \in H^\infty$, *et supposons que* $Im(\varphi) \nsubseteq \sigma(T_\psi)$. *Alors* $X = 0$ *est l'unique solution de l'équation* $XT_\psi = T_\varphi X$.

Démonstration. Posons $N = Im(\varphi) \cap (\mathbb{C}\backslash\sigma(T_\psi))$. On va alors distinguer les deux cas suivants :
- N est un singleton, lorsque φ est constante.
- N est un ouvert non-vide, quand φ n'est pas constante.

Dans les deux cas, $\varphi^{-1}(N)$ est un ensemble ouvert non-vide de $\mathbb{D}$, et donc non-dénombrable. D'après le lemme précédent, $\{k_\lambda : \lambda \in \varphi^{-1}(N)\}$ engendre H^2. Supposons dès à présent que $X \in \mathcal{B}(H^2)$ vérifie $XT_\psi = T_\varphi X$. Alors, $T_\psi^* X^* = X^* T_\varphi^*$. On en déduit que pour tout $\lambda \in \mathbb{D}$

$$T_\psi^* X^* k_\lambda = X^* T_\varphi^* k_\lambda = \overline{\varphi(\lambda)} X^* k_\lambda.$$

Par conséquent, pour tout $\lambda \in \mathbb{D}$, ou bien $\varphi(\lambda)$ est une valeur propre de T_ψ^*, ou bien $X^* k_\lambda = 0$. Or, si $\lambda \in \varphi^{-1}(N)$, il vient $\varphi(\lambda) \notin \sigma(T_\psi)$, ou encore $\overline{\varphi(\lambda)} \notin \sigma(T_\psi^*)$. On en conclut que si $\lambda \in \varphi^{-1}(N)$, $\overline{\varphi(\lambda)}$ ne peut pas être une valeur propre de T_ψ^*. Ce qui implique que $X^* k_\lambda = 0$ pour tout $\lambda \in \varphi^{-1}(N)$. D'après le lemme 3.4, $X^* = 0$ de fait $X = 0$, ce qui achève la preuve du théorème. □

Remarque 3.6. *Rappelons que dans le cas général, si* $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$

$$\sigma_{ext}(T) \subset \{\lambda \in \mathbb{C}, \quad \sigma(T) \cap \sigma(\lambda T) \neq \emptyset\}.$$

En posant $\psi = \lambda\varphi$ *dans le dernier théorème, et vu que* $\sigma(T_\varphi) = \overline{Im(\varphi)}$ *la fermeture de l'image de* φ*, on obtient l'inclusion suivante*

$$\sigma_{ext}(T_\varphi) \subset \{\lambda \in \mathbb{C}, \quad Im(\varphi) \subset \lambda\overline{Im(\varphi)}\}.$$

Ainsi, dans le cas des opérateurs de Toeplitz analytiques bornés, on obtient un résultat sur les valeurs propres étendues, beaucoup plus fort que dans le cas général.

Corollaire 3.7. *Soient* $\varphi \in H^\infty \backslash \{0\}$ *et* $|\alpha| > 1$*. Alors* $X = 0$ *est l'unique solution de l'équation* $XT_\varphi = T_{\alpha\varphi}X$*. En particulier,* $\sigma_{ext}(S) \subset \mathbb{C}\backslash\mathbb{D}$*.*

Démonstration. Remarquons que $Im(\alpha\varphi) \not\subseteq \sigma(T_\varphi)$, le résultat découle alors immédiatement du théorème précédent. □

La proposition suivante va nous fournir une condition suffisante pour que T_ψ s'entrelace avec T_φ. On aura d'abord besoin du lemme suivant, dû à J. Ryff. Pour la preuve on renvoie à [41].

Lemme 3.8. *Soient* $f \in H^p$ *et* $\Phi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ *une fonction analytique. Alors* $f \circ \Phi \in H^p$*, et si* $\lambda := \Phi(0) \neq 0$*, on a*

$$\|f \circ \Phi\|_p \leq \left(\frac{1 + |\lambda|}{1 - |\lambda|}\right)^{1/p} \|f\|_p.$$

Proposition 3.9. *Soient* $\varphi, \psi \in H^\infty$*. Supposons que* ψ *soit injective, et que* $Im(\varphi) \subset Im(\psi)$*. Alors* $T_\psi \propto T_\varphi$*.*

Démonstration. Par hypothèses, la fonction $F(z) = \psi^{-1}(\varphi(z))$ est une fonction analytique de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{D}$. Définissons alors l'opérateur $Xf(z) = f(F(z))$. Alors clairement $X \neq 0$, et d'après le lemme précédent $X \in \mathcal{B}(H^2)$. De plus, pour tout $f \in H^2$, on a

$$XT_\psi f(z) = X(\psi f) = (\psi \circ F)Xf = T_\varphi Xf.$$

D'où le résultat. $\square$

Cette dernière proposition, avec le corollaire 3.7 nous permettent d'obtenir le corollaire suivant.

Corollaire 3.10. *On a $T_{\lambda z} \propto T_z$ si et seulement si $|\lambda| \geq 1$. En particulier, $\sigma_{ext}(S) = \mathbb{C} \backslash \mathbb{D}$.*

Remarque 3.11. *Dans [19], J. A. Deddens a montré que la réciproque de la proposition 3.9 reste valable. En particulier, il a montré que si ψ est injective, alors $T_\psi \propto T_\varphi$ si et seulement si $Im(\varphi) \subset Im(\psi)$. Ainsi, on obtient le spectre étendu d'un opérateur de Toeplitz de symbole φ analytique borné et injectif. En effet, on a*

$$\sigma_{ext}(T_\varphi) = \{\lambda \in \mathbb{C}, \quad Im(\varphi) \subset \lambda Im(\varphi)\}.$$

Une formule qui donne directement le dernier corollaire.

Dans [5] A. Biswas et S. Petrovic ont traité le problème des sous espace propres étendus de l'opérateur shift S. En particulier, ils ont décrit de manière complète, l'ensemble $E_{ext}(\lambda)$ pour chaque $|\lambda| \geq 1$.

3.1.2 Spectre étendu du Shift

Dans ce paragraphe, on donne la description complète des sous-espaces propres étendus de l'opérateur shift unilatéral S, défini sur l'espace de Hardy H^2. On aura d'abord besoin de la proposition suivante (cf. [5]).

Proposition 3.12. *Soient $\lambda \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{D}$, $\phi \in H^2$, et définissons sur H^2 l'opérateur de composition à poids $X_{\phi,\lambda} g(z) := \phi(z) g(z/\lambda)$, i.e., $X_{\phi,\lambda} := M_\phi C_{1/\lambda}$. Alors :*

1. *Si $\lambda \in \mathbb{T}$ alors $X_{\phi,\lambda}$ est borné si et seulement si $\phi \in H^\infty$.*
2. *Si $\lambda \notin \mathbb{T}$ alors $X_{\phi,\lambda}$ est borné pour tout ϕ.*

Démonstration. 1. Puisque $|\lambda| = 1$, l'opérateur $C_{1/\lambda}$ est donc unitaire sur H^2. En multipliant alors par M_ϕ, on obtient un opérateur borné si et seulement si $\phi \in H^\infty$.
2. Considérons le polynôme $g(z) = \sum_{n=0}^N a_n z^n$. Par calcul simple on montre que $SX_{\phi,\lambda}g = \lambda X_{\phi,\lambda}Sg$, d'où :

$$X_{\phi,\lambda}g = X_{\phi,\lambda}\sum_{n=0}^{N} a_n S^n \mathit{1} = \sum_{n=0}^{N} \frac{a_n}{\lambda^n} S^n X_{\phi,\lambda}\mathit{1} = \sum_{n=0}^{N} \frac{a_n}{\lambda^n} S^n \phi.$$

Ainsi

$$\|X_{\phi,\lambda}g\| \leq \sum_{n=0}^{N} \frac{|a_n|}{|\lambda|^n}\|S^n\phi\| \leq \|\phi\| \left(\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{|\lambda|^{2n}}\right)^{1/2} \left(\sum_{n=0}^{N} |a_n|^2\right)^{1/2},$$

Par conséquent, si $|\lambda| > 1$ et $\phi \in H^2$ alors $X_{\phi,\lambda}$ est borné avec

$$\|X_{\phi,\lambda}\| \leq \|\phi\| \left(\frac{|\lambda|^2}{|\lambda|^2 - 1}\right)^{1/2}.$$

□

Cette proposition nous permet de décrire exactement les vecteurs propres étendus de S, par le théorème suivant.

Théorème 3.13. *Soit $|\lambda| \geq 1$. Alors l'opérateur $X \in \mathcal{B}(H^2)$ vérifie $SX = \lambda XS$ si et seulement s'il existe une fonction ϕ de H^2 (de H^∞ lorsque $|\lambda| = 1$) telle que $X = X_{\phi,\lambda}$.*

Démonstration. Soit $|\lambda| \geq 1$, on vérifie alors facilement que $X_{\phi,\lambda}$ est, pour tout ϕ de H^2 (de H^∞ lorsque $|\lambda| = 1$) une solution de l'équation $SX = \lambda XS$, appartenant à $\mathcal{B}(H^2)$. Montrons alors la réciproque. Supposons que $X \in \mathcal{B}(H^2)$ vérifie l'équation $SX = \lambda XS$. Cela implique que

$$S^n X = \lambda^n X S^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Cette dernière relation signifie que

$$S^n X f = \lambda^n X S^n f, \quad \forall f \in H^2 \quad et \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

En particulier, si $f = \mathbf{1}$, on obtient

$$X z^n = (\frac{z}{\lambda})^n X\mathbf{1}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

ce qui implique

$$Xp(z) = p(\frac{z}{\lambda})X\mathbf{1}, \quad \forall p \in \mathbb{C}[X].$$

Comme l'ensemble des polynômes définis sur $\mathbb{D}$ est dense dans H^2, en posant $X\mathbf{1} = \phi$ on obtient

$$Xf(z) = \phi(z)f(\frac{z}{\lambda}), \quad \forall f \in H^2.$$

On en déduit que $X = X_{\phi,\lambda}$ avec $\phi \in H^\infty$ si $|\lambda| = 1$, d'après la proposition précédente. Ainsi, le théorème est prouvé. □

Remarque 3.14. *En revenant à l'entrelacement entre les opérateurs de Toeplitz, P. S. Bourdon et J. H. Shapiro ont déterminé dans [6] l'opérateur d'entrelacement entre T_ψ et T_φ dans le cas où ψ est une fonction injective de H^∞. Plus précisément, ils ont montré la proposition suivante.*

Proposition 3.15. *Soit $\psi \in H^\infty$ une fonction injective, et supposons que l'opérateur X entrelace T_ψ avec T_φ. Alors X est un opérateur de composition à poids.*

Pour la preuve on renvoie à [6, Corollaire 4.3].

Remarque 3.16. *Notons que la proposition 3.12 est un cas particulier de la dernière proposition. En revanche, le cas général où la fonction ψ n'est pas injective, est loin d'être réglé. Dans [6], les auteurs considèrent la fonction $\varphi(z) = z^2 + z$, et ils déterminent le spectre étendu de l'opérateur T_φ.*

3.2 Spectre étendu de S_u

Etant donnée la fonction intérieure $u(z) = b(z)s(z)$, où b est la partie produit de Blaschke défini par (2.6), et s est la partie singulière avec μ pour mesure positive singulière. Dans ce paragraphe, nous présentons une caractérisation du spectre étendu de l'opérateur shift tronqué $S_u \in \mathcal{B}(K_u^2)$, donnée dans l'article [5] par A. Biswas et S. Petrovic. L'opérateur $S \in \mathcal{B}(H^2)$ étant le relèvement isométrique de $S_u \in \mathcal{B}(K_u^2)$, les auteurs utilisent le fameux théorème de relèvement de commutants de Sz.-Nagy-Foias, pour montrer le théorème suivant.

Théorème 3.17. *Soient T_1, T_2 des contractions sur $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ respectivement. Soient $U_1 \in \mathcal{B}(\mathcal{K}_1)$ un relèvement isométrique de T_1, et $U_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{K}_1)$ une contraction (pas forcément isométrique) relèvement de T_2. Supposons qu'il existe une contraction $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ telle que $BT_1 = T_2B$. Alors il existe une contraction $\hat{B} \in \mathcal{B}(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2)$ telle que*

$$\hat{B}U_1 = U_2\hat{B} \quad et \quad P_2\hat{B} = BP_1,$$

où P_i désigne le projecteur orthogonal sur $\mathcal{H}_i$ dans $\mathcal{B}(\mathcal{K}_i)$, avec $i = 1, 2$.

Démonstration. Soient $U_2' \in \mathcal{B}(\mathcal{K}_2')$ un relèvement isométrique de U_2, i.e., $P_{\mathcal{K}_2}U_2' = U_2P_{\mathcal{K}_2}$, où $P_{\mathcal{K}_2}$ est le projecteur orthogonal de $\mathcal{K}_2'$ sur $\mathcal{K}_2$. Alors U_2' est un relèvement isométrique de T_2. En effet,

$$P_2U_2' = P_2P_{\mathcal{K}_2}U_2' = P_2U_2P_{\mathcal{K}_2} = T_2P_2P_{\mathcal{K}_2} = T_2P_2.$$

En utilisant le théorème de relèvement de commutants de Sz.-Nagy-Foias (cf. [46]), on déduit qu'il existe une contraction $\hat{B}' \in \mathcal{B}(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2')$ telle que

$$\hat{B}'U_1 = U_2'\hat{B}' \quad et \quad P_2\hat{B}' = BP_1.$$

Définissons maintenant la contraction $\hat{B} \in \mathcal{B}(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2)$, en posant $\hat{B} = P_{\mathcal{K}_2}\hat{B}'$. Comme $\mathcal{H}_2 \subset \mathcal{K}_2'$, on a

$$P_2\hat{B} = P_2P_{\mathcal{K}_2}\hat{B}' = P_2\hat{B}' = BP_1.$$

De plus

$$\hat{B}U_1 = P_{\mathcal{K}_2}\hat{B}'U_1 = P_{\mathcal{K}_2}U_2'\hat{B}' = U_2P_{\mathcal{K}_2}\hat{B}' = U_2\hat{B},$$

ce qui achève la preuve du théorème. □

Nous pouvons à présent établir une relation entre le spectre étendu d'une contraction et celui de son relèvement isométrique.

Théorème 3.18. *Soit $\hat{T} \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ un relèvement isométrique de la contraction $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, et notons par P le projecteur orthogonal de $\mathcal{K}$ sur $\mathcal{H}$. Alors $|\lambda| \geq 1$ est une valeur propre étendue de T si et seulement s'il existe une contraction $\hat{X} \in \mathcal{B}(\mathcal{K})\backslash\{0\}$ vérifiant*

$$\hat{T}\hat{X} = \lambda\hat{X}\hat{T}, \quad P\hat{X} = P\hat{X}P, \quad P\hat{X} \neq 0. \tag{3.1}$$

Démonstration. Supposons que $|\lambda| \geq 1$ soit une valeur propre étendue de T, et posons $\beta = 1/\lambda$. Alors il existe un opérateur non-nul $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tel que $XT = \beta TX$. Remarquons que $\beta\hat{T}$ est une contraction relèvement de l'opérateur βT. Posons dans le théorème précédent

$$T_1 = T, \quad T_2 = \beta T, \quad B = X, \quad U_1 = \hat{T}, \quad et \quad U_2 = \beta\hat{T},$$

il s'en suit qu'il existe une contraction $\hat{X} \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ vérifiant $\hat{X}\hat{T} = \beta\hat{T}\hat{X}$ et $P\hat{X} = XP$. D'où, $P\hat{X} = P\hat{X}P$, et puisque $XP \neq 0$, $P\hat{X} \neq 0$. Par conséquent $\hat{X} \neq 0$ vérifie (3.1).

Réciproquement, supposons qu'il existe une contraction non-nulle $\hat{X} \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ vérifiant (3.1). Alors $X = P\hat{X}|_{\mathcal{H}}$ est un opérateur non-nul vérifiant $TX = \lambda XT$. En effet, comme $TP = P\hat{T}$, alors

$$\beta TX = \beta TP\hat{X}|_{\mathcal{H}} = \beta P\hat{T}\hat{X}|_{\mathcal{H}} = P\hat{X}\hat{T}|_{\mathcal{H}} = P\hat{X}P\hat{T}|_{\mathcal{H}} = XP\hat{T}|_{\mathcal{H}} = XA.$$

Montrons enfin que $X \neq 0$. Or $P\hat{X} = P\hat{X}P \neq 0$, il existe alors $x \in \mathcal{H}$ tel que $P\hat{X}Px \neq 0$, ce qui implique $X(Px) \neq 0$. Ainsi le théorème est démontré. □

En utilisant le théorème précédent ensemble avec le théorème 3.13, on peut montrer le lemme suivant (cf. [5, Lemme 3.7]).

Lemme 3.19. *Soient u une fonction intérieure, et S_u l'opérateur shift tronqué correspondant. Supposons que β soit un nombre complexe non-nul tel que $|\beta| \leq 1$. Considérons ensuite la fonction $u_\beta \in H^\infty$ définie par $u_\beta(z) = u(\beta z)$, pour tout $z \in \mathbb{D}$. Alors il existe une solution non-nulle de l'équation $XS_u = \beta S_u X$, si et seulement s'il existe une fonction intérieure non-constante divisant u et u_β dans l'algèbre H^∞.*

Maintenant, soit $u(z) = b(z)s(z)$ une fonction intérieure, avec b est la partie produit de Blaschke défini par (2.6), et s est la partie singulière de mesure positive singulière μ. Soit $\lambda \in \mathbb{T}$, et notons par μ_λ la mesure définie sur tout borélien $E \subset \mathbb{T}$ par $\mu_\lambda(E) = \mu(\lambda E)$. En utilisant le dernier lemme, A. Biswas et S. Petrovic ont montré le théorème suivant (cf. [5, Théorème 3.10]).

Théorème 3.20. *Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors :*

1. *Si $\lambda \notin \mathbb{T}$, alors $S_uX = \lambda X S_u$ admet une solution $X \in \mathcal{B}(K_u^2)\backslash\{0\}$ si et seulement s'il existe $m, n \in \mathbb{N}^*$ tels que $\alpha_m = \lambda\alpha_n$.*
2. *Si $\lambda \in \mathbb{T}$, alors $S_uX = \lambda X S_u$ admet une solution $X \in \mathcal{B}(K_u^2)\backslash\{0\}$ si et seulement si au moins l'une des deux conditions suivantes soit vérifiée :*
   a) Il existe $m, n \in \mathbb{N}^*$ tels que $\alpha_m = \lambda\alpha_n$.
   b) Les mesures μ et μ_λ ne sont pas mutuellement singulières.

Remarquons que ce théorème détermine le spectre étendu de S_u, mais ne donne aucune description des vecteurs propres étendus associés à chaque valeur propre. Dans le paragraphe suivant, on considère le cas $u = b$ un produit de Blaschke, et on affirme dans ce cas le dernier résultat, sans passer par le théorème de Sz.-Nagy-Foias. De plus, on décrit complètement l'ensemble de tous les vecteurs propres étendus associés à chaque valeur propre étendue de S_b.

3.3 Spectre étendu et sous espaces propres étendus de S_b

Avant de commencer, nous allons avoir besoin de quelques résultats intermédiaires. Notons pour cela par $\{e_{i,l}^* : i \geq 1,\ l = 0, ..., p_i - 1\}$ la famille duale des noyaux $\{e_{i,l} : i \geq 1,\ l = 0, ..., p_i - 1\}$ définis par (2.7) (i.e., la famille de noyaux vérifiant :

$$\langle e_{i,k}^*, e_{j,l}\rangle = \delta_{ij}\delta_{kl},\ \forall\ i, j \geq 1,\ k = 0, ..., p_i - 1,\ l = 0, ..., p_j - 1, \quad (3.2)$$

avec $\langle ., . \rangle$ signifie le produit scalaire en L^2), alors on démontre le lemme suivant

Lemme 3.21. *Soit b un produit de Blaschke défini par (2.6), alors*

$$S_b^* e_{i,l} = \begin{cases} \overline{\alpha_i} e_{i,0} & si\ l = 0 \\ l e_{i,l-1} + \overline{\alpha_i} e_{i,l} & sinon, \end{cases}$$

$$S_b e_{i,l}^* = \begin{cases} \alpha_i e_{i,p_i-1}^* & si\ l = p_i - 1 \\ \alpha_i e_{i,l}^* + (l+1) e_{i,l+1}^* & sinon. \end{cases}$$

Démonstration. Commençons par montrer la première formule. Si $l = 0$ alors

$$S_b^* e_{i,0}(z) = \frac{k_{\alpha_i}^b(z) - k_{\alpha_i}^b(0)}{z} = \frac{\overline{\alpha_i}}{1 - \overline{\alpha_i} z} = \overline{\alpha_i} e_{i,0}(z).$$

Si $l \neq 0$,

$$\begin{aligned} S_b^* e_{i,l}(z) &= \frac{l! z^{l-1}}{(1 - \overline{\alpha_i} z)^{l+1}} \\ &= l! \left(\frac{z^{l-1}}{(1 - \overline{\alpha_i} z)^{l}} + \overline{\alpha_i} \frac{z^{l}}{(1 - \overline{\alpha_i} z)^{l+1}} \right) \\ &= l e_{i,l-1}(z) + \overline{\alpha_i} e_{i,l}(z). \end{aligned}$$

Quant à la deuxième formule, il suffit d'utiliser la première formule et le fait que

$$\langle S_b e_{i,k}^*, e_{j,l} \rangle = \langle e_{i,k}^*, S_b^* e_{j,l} \rangle,\ \forall\ i, j \geq 1,\ k = 0, ..., p_i - 1,\ l = 0, ..., p_j - 1.$$

□

Si l'on note maintenant pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $E_i = Vect\{e_{i,0}, ..., e_{i,p_i-1}\}$, et $E_i^* = Vect\{e_{i,0}^*, ..., e_{i,p_i-1}^*\}$. Alors le lemme 3.21 nous permet d'avoir le résultat suivant.

Corollaire 3.22. *Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on a*

1. *les sous-espaces E_i et E_i^* sont respectivement invariants par rapport à S_b^* et S_b.*

2. *Si* $l \in \{0, 1, ..., p_i - 1\}$*, alors pour tout* $k = 0, 1, ..., l$*, on a*

$$(S_b - \alpha_i I)^k e^*_{i,p_i-l-1} \neq 0, \; et \; (S_b - \alpha_i I)^{l+1} e^*_{i,p_i-l-1} = 0.$$

En particulier, $\ker(S_b - \alpha_i I)^{l+1} = Vect\{e^*_{i,p_i-l-1}, ..., e^*_{i,p_i-1}\}$*, et pour tout* $k \geq p_i$*, on a* $\ker(S_b - \alpha_i I)^k = \ker(S_b - \alpha_i I)^{p_i} = E^*_i$.

Démonstration. La première assertion est triviale. Pour montrer la deuxième, on raisonne par récurrence. Pour $l = 0$, les formules sont immédiates d'après le dernier lemme. Supposons alors que l'assertion soit vraie pour un certain $k \in \{0, 1, ..., l - 1\}$, i.e.,

$$x := (S_b - \alpha_i I)^{l-1} e^*_{i,p_i-l} \neq 0, \; et \; (S_b - \alpha_i I)x = 0,$$

et montrons que

$$(S_b - \alpha_i I)^l e^*_{i,p_i-l-1} \neq 0, \; et \; (S_b - \alpha_i I)^{l+1} e^*_{i,p_i-l-1} = 0.$$

En utilisant le lemme 3.21 ensemble avec l'hypothèse de récurrence, on obtient

$$(S_b - \alpha_i I)^l e^*_{i,p_i-l-1} = (p_i - l)x \neq 0,$$

et

$$(S_b - \alpha_i I)^{l+1} e^*_{i,p_i-l-1} = (p_i - l)(S_b - \alpha_i I)x = 0.$$

Par conséquent, $Vect\{e^*_{i,p_i-l-1}, ..., e^*_{i,p_i-1}\} \subset \ker(S_b - \alpha_i I)^{l+1}$ et l'opérateur $(S_b - \alpha_i I)^{l+1}$ est injectif sur $Vect\{e^*_{i,0}, ..., e^*_{i,p_i-l-2}\}$. Pour achever la preuve, montrons que $(S_b - \alpha_i I)^{l+1}$ est injectif sur

$$\overline{Vect\{E^*_j : j \geq 1 \; et \; j \neq i\}}.$$

Puisque E^*_j est invariant par rapport à $(S_b - \alpha_i I)^{l+1}$, il suffit de montrer que $(S_b - \alpha_i I)^{l+1}$ est injectif sur chaque E^*_j où $j \neq i$. Raisonnons pour cela par l'absurde en supposant qu'il existe $x \in E^*_j$ pour un $j \neq i$, tel que $(S_b - \alpha_i I)^{l+1} x = 0$, alors $(S_b - \alpha_i I)^l x \in Vect\{e^*_{i,p_i-1}\}$. Ce qui contredit le fait que E^*_j est invariant par rapport à $(S_b - \alpha_i I)^l$. □

Nous allons, à travers les deux prochains paragraphes, décrire les valeurs et les vecteurs propres étendus de S_b dans le cas où b est un produit de Blaschke quelconque. Ces travaux sont issus à l'aide du Professeur Gilles Cassier, et ont conduit à la publication de l'article [1].

Considérons alors dans la suite, le produit de Blaschke b défini par (2.6). Il est bien connu que $\sigma(S_b) = \overline{\{\alpha_i\}}_{i\geq 1}$ et que $\sigma_p(S_b) = \{\alpha_i\}_{i\geq 1}$ (voir par exemple [36]). Si, par exemple, $\alpha_1 = 0$, alors d'après (3) du corollaire 2.11, on a $\sigma_{ext}(S_b) = \mathbb{C}$. En effet, $X = e^*_{1,p_1-1} \otimes e_{1,0}$ est bien un vecteur propre étendu de S_b associé à toute valeur $\lambda \in \mathbb{C}$, avec $S_bX = 0 = \lambda X S_b$. Pour cela, on suppose dans toute la suite que $\alpha_i \neq 0$ pour tout $i \geq 1$.

3.3.1 Cas de produits de Blaschke finis

Avant de traiter le cas général, on considère le cas où b est un produit de Blaschke fini, et on montre le théorème 3.23 comme une application directe du corollaire 2.11 et du lemme 3.21. Donc, si b est le produit de Blaschke fini défini par (2.5) avec $p_i = 1$ pour tout i, alors d'après le corollaire 2.11, $\sigma_{ext}(S_b) = \{\alpha_i/\alpha_j : i, j = 1...n\}$ et $e^*_i \otimes e_j \in E_{ext}(\alpha_i/\alpha_j)$. La question naturelle qui se pose ici, est de savoir si ce vecteur propre étendu est unique (à une constante près).

Le théorème suivant répond à cette question.

Théorème 3.23. *Soit b un produit Blaschke fini donné par (2.5) avec $p_i = 1$ pour tout i, alors $\sigma_{ext}(S_b) = \{\alpha_i/\alpha_j : i, j = 1, ..., n\}$, et*

$$E_{ext}(\frac{\alpha_i}{\alpha_j}) = Vect\{e^*_k \otimes e_l : \frac{\alpha_k}{\alpha_l} = \frac{\alpha_i}{\alpha_j}\}.$$

Démonstration. Puisque $\{e^*_i\}_{i=1}^n$ est une base de K^2_b, alors $\{E_{ij} := e^*_i \otimes e_j\}_{i,j=1}^n$ forme une base de $\mathcal{B}(K^2_b)$. Supposons maintenant que $X \in \mathcal{B}(K^2_b)$ soit une solution de l'équation

$$S_bX = \frac{\alpha_i}{\alpha_j} X S_b,$$

alors il existe une suite de nombres complexes $\{a_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ telle que

$$S_b(\sum_{k,l=1}^{n} a_{kl}E_{kl}) = \frac{\alpha_i}{\alpha_j}(\sum_{k,l=1}^{n} a_{kl}E_{kl})S_b,$$

et d'après le lemme 3.21,

$$S_bE_{kl} = S_b(e_k^* \otimes e_l) = (S_be_k^*) \otimes e_l = \alpha_k e_k^* \otimes e_l,$$

et

$$E_{kl}S_b = (e_k^* \otimes e_l)S_b = e_k^* \otimes (S_b^* e_l) = \alpha_l e_k^* \otimes e_l.$$

On en déduit que

$$(\sum_{k,l=1}^{n} \frac{\alpha_k}{\alpha_l} a_{kl}E_{kl})S_b = (\sum_{k,l=1}^{n} \frac{\alpha_i}{\alpha_j} a_{kl}E_{kl})S_b,$$

Comme S_b est inversible et vu que la famille $\{E_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ forme une base de $\mathcal{B}(K_b^2)$, la dernière équation conduit aux égalités suivantes

$$\frac{\alpha_k}{\alpha_l} a_{kl} = \frac{\alpha_i}{\alpha_j} a_{kl}, \ \forall k, l = 1, ..., n,$$

de fait

$$E_{ext}(\frac{\alpha_i}{\alpha_j}) = Vect\{e_k^* \otimes e_l : \frac{\alpha_k}{\alpha_l} = \frac{\alpha_i}{\alpha_j}\}.$$

□

3.3.2 Cas de produits de Blaschke quelconques

Considérons dans ce paragraphe le produit de Blaschke infini défini par (2.6), et soit $\{\gamma_i\}_{i\in I}$ la fermeture de l'ensemble des points limites des zéros $\{\alpha_i\}_{i\geq 1}$ sur le cercle $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Alors d'après la proposition (2.3), on a

$$\sigma_{ext}(S_b) \subset \{\frac{\lambda}{\beta} : \lambda, \beta \in \{\alpha_i\}_{i\geq 1} \cup \{\gamma_i\}_{i\in I}\}.$$

Le théorème suivant montre que cette inclusion est propre, plus précisément, on a

Théorème 3.24. *Soient $X \in \mathcal{B}(K_b^2)$, et b le produit de Blaschke infini défini par (2.6). Alors*

$$\sigma_{ext}(S_b) = \{\frac{\alpha_i}{\alpha_j} : i, j \geq 1\},$$

et pour tous $i, j \geq 1$, $X \in E_{ext}(\frac{\alpha_i}{\alpha_j})\backslash\{0\}$ si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a

1. *Si l'on a $\alpha_m/\alpha_n = \alpha_i/\alpha_j$ pour un $m \in \mathbb{N}^*$, alors il existe $l \in \{0, ..., \min(p_m - 1, p_n - 1)\}$, tel que pour tout $k = 0, ..., l$,*

$$Xe^*_{n,l-k} = \sum_{r=0}^{k} c_{k-r}(m,n)(\frac{\alpha_m}{\alpha_n})^r \frac{(l+r-k)!(p_m - r - 1)!}{(l-k)!(p_m - 1)!} e^*_{m,p_m-r-1}$$

   où $c_i(m,n) \in \mathbb{C}$, avec au moins l'une des constantes $c_0(m,n)$ correspondants à l'une de telles paires (m,n), est non-nulle.

2. *Si $\alpha_m/\alpha_n \neq \alpha_i/\alpha_j$ pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, alors*

$$Xe^*_{n,k} = 0 \quad \forall k = 0, ..., p_n - 1.$$

Démonstration. Soient $\lambda \in \mathbb{C}$ et $X \in \mathcal{B}(K_b^2)$ tels que

$$S_b X = \lambda X S_b.$$

En utilisant le lemme 3.21, on obtient pour tout $j \geq 1$

$$S_b X e^*_{j,l} = \begin{cases} \lambda \alpha_j X e^*_{j,p_j-1} & \text{si } l = p_j - 1 \\ \lambda \alpha_j X e^*_{j,l} + \lambda(l+1) X e^*_{j,l+1} & \text{si } l = 0, ..., p_j - 2. \end{cases}$$

Supposons maintenant que $X \neq 0$, alors il existe forcément $i, j \geq 1$, $l \in \{0, 1, ..., p_j - 1\}$ et $c_0 \in \mathbb{C}^*$ tels que

$$\lambda = \frac{\alpha_i}{\alpha_j} \text{ et } Xe^*_{j,l} = c_0 e^*_{i,p_i-1}.$$

Par conséquent

$$S_b X e^*_{j,l-1} = \frac{\alpha_i}{\alpha_j} X(\alpha_j e^*_{j,l-1} + l e^*_{j,l}), \tag{3.3}$$

équivaut à

$$(S_b - \alpha_i I)Xe^*_{j,l-1} = \frac{\alpha_i}{\alpha_j} lc_0 e^*_{i,p_i-1}.$$

D'où, il existe deux scalaires $c_0^{(1)} \neq 0$ et c_1 tels que

$$Xe^*_{j,l-1} = c_0^{(1)} e^*_{i,p_i-2} + c_1 e^*_{i,p_i-1},$$

alors (3.3) implique

$$\begin{aligned} c_0^{(1)}(\alpha_i e^*_{i,p_i-2} + (p_i-1)e^*_{i,p_i-1}) + c_1\alpha_i e^*_{i,p_i-1} \\ = \alpha_i(c_0^{(1)} e^*_{i,p_i-2} + c_1 e^*_{i,p_i-1}) + \frac{\alpha_i}{\alpha_j} lc_0 e^*_{i,p_i-1}, \end{aligned}$$

de fait

$$c_0^{(1)} = \frac{\alpha_i}{\alpha_j}\frac{l}{p_i-1}c_0.$$

En répétant cette procédure un nombre de fois égal à $min(p_i-2, l-1)$, on obtient

$$Xe^*_{j,l-k} = \sum_{r=0}^{k} c^{(r)}_{k-r} e^*_{i,p_i-r-1},$$

avec

$$c^{(r)}_{k-r} = (\frac{\alpha_i}{\alpha_j})^r \frac{(l+r-k)!(p_i-r-1)!}{(l-k)!(p_i-1)!} c_{k-r},\ k = 2, ..., min(p_i-1, l).$$

Ainsi, si $l \geq p_i$, on aurait

$$(S_b - \alpha_i I)Xe^*_{j,l-p_i} = \frac{\alpha_i}{\alpha_j}(l-p_i+1)\sum_{r=0}^{p_i-1} c^{(r)}_{p_i-1-r} e^*_{i,p_i-1-r},$$

avec $c_0^{(p_i-1)} \neq 0$. D'où,

$$(S_b - \alpha_i I)^{p_i} Xe^*_{j,l-p_i} \neq 0 \ et \ (S_b - \alpha_i I)^{p_i+1} Xe^*_{j,l-p_i} = 0,$$

ce qui contredit le corollaire 3.22. Par conséquent, si X est une solution non triviale de l'équation

$$S_b X = \frac{\alpha_i}{\alpha_j} X S_b, \tag{3.4}$$

alors

$$Xe^*_{j,l-k} = \sum_{r=0}^{k} c_{k-r}(\frac{\alpha_i}{\alpha_j})^r \frac{(l+r-k)!(p_i-r-1)!}{(l-k)!(p_i-1)!} e^*_{i,p_i-r-1},$$

pour tout $k = 0, ..., l$. Maintenant, supposons que n soit un entier positif différent de j (i.e., $\alpha_n \neq \alpha_j$). Alors

$$S_b X e^*_{n,l} = \begin{cases} \frac{\alpha_i}{\alpha_j}\alpha_n X e^*_{n,p_n-1} & \text{si } l = p_n - 1 \\ \frac{\alpha_i}{\alpha_j}\alpha_n X e^*_{n,l} + \frac{\alpha_i}{\alpha_j}(l+1) X e^*_{n,l+1} & \text{si } l = 0, ..., p_n - 2. \end{cases}$$

En utilisant de nouveau le corollaire 3.22, s'il existe $l \in \{0, 1, ..., p_n - 1\}$ tel que $Xe^*_{n,l} \neq 0$, alors forcément il existe un entier positif m (différent de i) tel que

$$\frac{\alpha_i}{\alpha_j} = \frac{\alpha_m}{\alpha_n},\ et\ Xe^*_{n,l} = c_0 e^*_{m,p_m-1},\ (c_0 \neq 0) \in \mathbb{C}.$$

Dans ce cas, et par les mêmes arguments, on obtient un comportement de X sur $e^*_{n,l}$ analogue au cas de $e^*_{j,l}$.

Montrons maintenant la réciproque. D'après la proposition 2.12, comme les noyaux de Cauchy $\{e^*_{i,l} : i \geq 1,\ l = 0, ..., p_i - 1\}$ engendrent l'espace K^2_b, il suffit de vérifier l'équation (5.3) sur ce dernier ensemble. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on va distinguer les deux cas suivants :
Si $Xe^*_{n,k} = 0$, on vérifie facilement que

$$S_b X e^*_{n,r} = \frac{\alpha_i}{\alpha_j} X S_b e^*_{n,r} = 0,\ \forall r = k, ..., p_n - 1.$$

Supposons dans le deuxième cas qu'il existe $l \in \{0, ..., p_n - 1\}$ et $k \in \{0, ..., l\}$ tels que $Xe^*_{n,l-k} \neq 0$ (il existe forcément dans ce cas $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $\alpha_m/\alpha_n = \alpha_i/\alpha_j$). Alors, si $l - k = p_n - 1$ (i.e., $l = p_n - 1$ et $k = 0$), par calcul simple on obtient

$$S_b X e^*_{n,p_n-1} = \frac{\alpha_i}{\alpha_j} X S_b e^*_{n,p_n-1} = \alpha_m c_0 e^*_{m,p_m-1}.$$

Si $l-k<p_n-1$, alors

$$\begin{aligned}
&S_bXe^*_{n,l-k}\\
&= S_b\left(\sum_{r=0}^{k} c_{k-r}(\frac{\alpha_m}{\alpha_n})^r\frac{(l+r-k)!(p_m-r-1)!}{(l-k)!(p_m-1)!}e^*_{m,p_m-r-1}\right)\\
&= c_k\alpha_m e^*_{m,p_m-1}+\alpha_m\sum_{r=1}^{k} c_{k-r}(\frac{\alpha_m}{\alpha_n})^r\frac{(l+r-k)!(p_m-r-1)!}{(l-k)!(p_m-1)!}e^*_{m,p_m-r-1}\\
&\quad+(p_m-r)\sum_{r=1}^{k} c_{k-r}(\frac{\alpha_m}{\alpha_n})^r\frac{(l+r-k)!(p_i-r-1)!}{(l-k)!(p_i-1)!}e^*_{m,p_m-r}.
\end{aligned}$$

Quant au deuxième membre

$$\begin{aligned}
&\frac{\alpha_i}{\alpha_j}XS_be^*_{n,l-k}\\
&= \frac{\alpha_m}{\alpha_n}X(\alpha_n e^*_{n,l-k}+(l-k+1)e^*_{n,l-k+1})\\
&= \alpha_m\sum_{r=0}^{k} c_{k-r}(\frac{\alpha_m}{\alpha_n})^r\frac{(l+r-k)!(p_m-r-1)!}{(l-k)!(p_m-1)!}e^*_{m,p_m-r-1}\\
&+(l-k+1)\sum_{r=0}^{k-1} c_{k-r-1}(\frac{\alpha_m}{\alpha_n})^{r+1}\frac{(l+r-k+1)!(p_m-r-1)!}{(l-k+1)!(p_m-1)!}e^*_{m,p_m-r-1}.
\end{aligned}$$

Un changement simple d'indice de la somme dans le deuxième membre implique l'équation désirée. Ainsi le théorème est démontré. □

Exemple 3.25. Soit b le produit de Blaschke infini défini par (2.6), et supposons que $p_i=1$ pour tout $i\in\mathbb{N}^*$, et que l'ensemble des zéros $\{\alpha_i\}_{i\in I}$ vérifie la condition de Carleson, alors d'après la proposition 2.12 et le théorème 3.24, on a

$$\sigma_{ext}(S_b)=\{\frac{\alpha_i}{\alpha_j}:i,j\geq 1\},$$

et

$$E_{ext}(\frac{\alpha_i}{\alpha_j})=\overline{Vect\{e^*_m\otimes e_n:\frac{\alpha_m}{\alpha_n}=\frac{\alpha_i}{\alpha_j}\}}.$$

Chapitre 4

Spectre étendu des opérateurs normaux et applications

Dans ce chapitre, on traite une classe d'opérateurs très importante, à savoir les opérateurs normaux définis sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. En particulier, on donne une description complète des ensembles des valeurs propres étendues et des vecteurs propres étendus associés.

Ces travaux sont issus d'une collaboration avec le Professeur Gilles Cassier, et ont conduit à la publication de l'article [12].

Avant de commencer, on considère le produit d'un opérateur positif par un opérateur autoadjoint. On en déduit par la suite une description complète des valeurs propres et des vecteurs propres étendus pour les opérateurs autoadjoints. Enfin, on utilise le théorème de Fuglede-Putnam pour traiter le cas des opérateurs normaux.

4.1 Produit d'opérateurs autoadjoints

Dans ce paragraphe, on décrit complètement l'ensemble des valeurs propres et des vecteurs propres étendus du produit d'un opérateur positif A par un opérateur autoadjoint B, les deux produits AB et BA étant supposés injectifs. On aura d'abord besoin du lemme suivant.

Lemme 4.1. *Soit $R \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ un opérateur autoadjoint avec E pour mesure spectrale associée, et soit $a > ||R||$. Alors pour tout $p \in \mathbb{C}[X]$ et tous $x, y \in \mathcal{H}$, on a*

$$< p(R)x, y >= p(a) < x, y > - \int_{-a}^{a} p^{'}(t) < E(]-\infty, t])x, y > dt.$$

En particulier, si R est un opérateur positif, alors

$$< p(R)x, y >= p(a) < x, y > - \int_{0}^{a} p^{'}(t) < E([0, t])x, y > dt, \ \forall x, y \in \mathcal{H}.$$

Démonstration. Si l'on note par $\mathbf{1}_\Omega$ la fonction indicatrice de l'ensemble $\Omega \subset \mathbb{R}$; c'est-à-dire la fonction définie par

$$\mathbf{1}_\Omega(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in \Omega, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

alors

$$\begin{aligned} &\int_{-a}^{a} p^{'}(t) < E(]-\infty, t])x, y > dt \\ &\quad = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[-a,a]}(t) p^{'}(t) \left(\int_{-a}^{a} \mathbf{1}_{]-\infty,t]}(s) dE_{x,y}(s) \right) dt, \end{aligned}$$

et d'après le théorème de Fubini

$$\begin{aligned} &\int_{-a}^{a} p^{'}(t) < E(]-\infty, t])x, y > dt \\ &\quad = \int_{-a}^{a} \left(\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[-a,a]}(t) \mathbf{1}_{[s,a]}(t) p^{'}(t) dt \right) dE_{x,y}(s) \\ &\quad = \int_{-a}^{a} \left(\int_{s}^{a} p^{'}(t) dt \right) dE_{x,y}(s) = p(a) < x, y > - < p(R)x, y > . \end{aligned}$$

Le lemme est alors bien prouvé. □

Théorème 4.2. *Soient $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, et soit $T = AB$ tel que $0 \notin \sigma_p(T) \cup \sigma_p(T^*)$, alors*

1. *Si $A, B \geq 0$, alors $\sigma_{ext}(T) \subset \mathbb{R}_+^*$.*
2. *Si $A \geq 0$ et $B = B^*$, alors $\sigma_{ext}(T) \subset \mathbb{R}^*$.*

Démonstration. (1) Considérons $R = \sqrt{A}B\sqrt{A}$, alors on peut montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T^{n+1} = \sqrt{A}R^n\sqrt{A}B$. Donc pour tout polynôme $p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$, on a

$$p(T) = a_0 I + \sqrt{A}\sum_{k=1}^{n} a_k R^{k-1}\sqrt{A}B = a_0 I + \sqrt{A}(S^*p)(R)\sqrt{A}B,$$

où S^* signifie l'adjoint de l'opérateur du shift unilatéral.
Notons tout d'abord que $0 \notin \sigma_{ext}(T)$, car T est injectif.
Supposons maintenant que $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_+$, et soit $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ vérifiant $TX = \lambda XT$, ce qui implique $p(T)X = Xp(\lambda T)$ pour tout $p \in \mathbb{C}[X]$. Soit $p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$, alors pour tout $x, y \in \mathcal{H}$, on a

$$< p(T)Xx, y >= a_0 < Xx, y > + < (S^*p)(R)\sqrt{A}BXx, \sqrt{A}y > .$$

En utilisant le lemme 4.1, on obtient d'une part

$$\begin{aligned} < p(T)Xx, y >=& a_0 < Xx, y > +(S^*p)(a) < TXx, y > \\ & - \int_0^a (S^*p)'(t) < E([0,t])\sqrt{A}BXx, \sqrt{A}y > dt, \end{aligned}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} < Xp(\lambda T)x, y >=& a_0 < Xx, y > +\lambda(S^*p)(\lambda a) < XTx, y > \\ & - \lambda^2 \int_0^a (S^*p)'(\lambda t) < E([0,t])\sqrt{A}Bx, \sqrt{A}X^*y > dt. \end{aligned}$$

Or S^* est surjectif dans $\mathbb{C}[X]$, on obtient alors

$$\begin{aligned} q(a) < TXx, y > - \lambda q(\lambda a) < XTx, y > & \\ = \int_0^a q'(t) < E([0,t])\sqrt{A}BXx, \sqrt{A}y > dt & \\ - \lambda^2 \int_0^a q'(\lambda t) < E([0,t])\sqrt{A}Bx, \sqrt{A}X^*y > dt, & \end{aligned}$$

pour tout $q \in \mathbb{C}[X]$.

Soit maintenant $p \in \mathbb{C}[X]$ et posons $q(x) = \int_0^x p(t)dt$, il vient

$$\begin{aligned}\int_0^a p(t)dt < TXx, y > -\lambda^2 \int_0^a p(\lambda t)dt < XTx, y >\\ = \int_0^a p(t) < E([0,t])\sqrt{A}BXx, \sqrt{A}y > dt\\ - \lambda^2 \int_0^a p(\lambda t) < E([0,t])\sqrt{A}Bx, \sqrt{A}X^*y > dt.\end{aligned}$$

Posons $K = [0,a] \cup [0, \lambda a]$, d'après le lemme 2.14, si $z \notin K$ alors $(\varepsilon_1 - zid)^{-1} \in \mathcal{A} = \overline{\mathbb{C}[X]}^{C(K)}$, il existe donc une suite de polynômes (p_n) uniformément convergente vers cette dernière fonction. Il s'en suit

$$\begin{aligned}\int_0^a \frac{1}{t-z}dt < TXx, y > -\lambda^2 \int_0^a \frac{1}{\lambda t - z}dt < XTx, y >\\ = \int_0^a \frac{1}{t-z} < E([0,t])\sqrt{A}BXx, \sqrt{A}y > dt\\ - \lambda^2 \int_0^a \frac{1}{\lambda t - z} < E([0,t])\sqrt{A}Bx, \sqrt{A}X^*y > dt.\end{aligned}$$

Soient maintenant $\epsilon > 0$ et $0 < \alpha < \beta \leq a$, et considérons

$$\begin{aligned}\Gamma =& \{\alpha + is, -\epsilon \leq s \leq \epsilon\} \cup \{\beta + is, -\epsilon \leq s \leq \epsilon\}\\ &\cup \{r + i\epsilon, \alpha \leq r \leq \beta\} \cup \{r - i\epsilon, \alpha \leq r \leq \beta\}.\end{aligned}$$

On peut facilement montrer que

$$\int_\Gamma \int_0^a \left| \frac{1}{t-z} \right| dtd|z| < \infty.$$

En intégrant sur Γ les deux membres de la dernière équation, et en divisant par $2\pi i$, on obtient que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \int_0^a \frac{1}{t-z}dtdz < TXx, y > -\frac{\lambda^2}{2\pi i}\int_\Gamma \int_0^a \frac{1}{\lambda t - z}dtdz < XTx, y >\\ = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \int_0^a \frac{1}{t-z} < E([0,t])\sqrt{A}BXx, \sqrt{A}y > dtdz\\ - \frac{\lambda^2}{2\pi i}\int_\Gamma \int_0^a \frac{1}{\lambda t - z} < E([0,t])\sqrt{A}Bx, \sqrt{A}X^*y > dtdz.\end{aligned}$$

Notons par $\Delta = Int(\Gamma)$. En utilisant le théorème de Fubini, et vu le choix arbitraire de ϵ, on obtient que

$$\int_0^a \mathbf{1}_\Delta(t)dt < TXx, y >= \int_0^a \mathbf{1}_\Delta(t) < E([0,t])\sqrt{A}BXx, \sqrt{A}y > dt,$$

ou

$$\int_\alpha^\beta \Big(< TXx, y > - < \sqrt{A}E([0,t])\sqrt{A}BXx, y >\Big)\, dt = 0,$$

D'où

$$< TXx, y >=< \sqrt{A}E([0,t])\sqrt{A}BXx, y >, \ p.\ p.\ t \in]0, a].$$

Alors, la séparabilité de $\mathcal{H}$ implique

$$TX = \sqrt{A}E([0,t])\sqrt{A}BX, \ p.\ p.\ t \in]0, a].$$

Soit $(t_n)_{n\geq 0} \subset]0, a]$ une suite vérifiant la dernière équation pour tout $n \geq 0$, et tel que $t_n \searrow 0$, alors

$$TX = \sqrt{A}E(\{0\})\sqrt{A}BX = \sqrt{A}P_{ker(R)}\sqrt{A}BX.$$

Enfin, notons que $ker(R) = \{0\}$. En effet, soit $x \in \mathcal{H}$ tel que $Rx = 0$, alors $\sqrt{A}B\sqrt{A}x = 0$, d'où $T\sqrt{A}x = 0$. Or T est injectif, donc $\sqrt{A}x = 0$. Par conséquent $T^*x = BAx = 0$ ce qui implique $x = 0$, puisque T^* est injectif.
On a alors montré que $TX = 0$, ce qui implique $X = 0$.

(2) Soient $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^*$ et $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tels que $TX = \lambda XT$, on obtient alors d'une manière analogue

$$\Big(\int_0^a \mathbf{1}_\Delta(t)dt - \lambda \int_0^a \mathbf{1}_\Delta(\lambda t)dt\Big) < TXx, y > \tag{4.1}$$

$$\begin{aligned}&= \int_{-a}^a \mathbf{1}_\Delta(t) < E(]-\infty, t])\sqrt{A}BXx, \sqrt{A}y > dt \\ &\quad - \lambda^2 \int_{-a}^a \mathbf{1}_\Delta(\lambda t) < E(]-\infty, t])\sqrt{A}Bx, \sqrt{A}X^*y > dt.\end{aligned}$$

On continue alors avec le même processus qu'en (1), et on aboutit à $X = 0$. □

Le résultat suivant décrit l'ensemble des vecteurs propres étendus de l'opérateur T défini dans le théorème 4.2, en fonction de la mesure spectrale associée à l'opérateur autoadjoint R.

Théorème 4.3. *Soient $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tels que $A \geq 0$ et $B^* = B$, et soit $T = AB$ tel que T et T^* sont injectifs. Considérons $R = \sqrt{A}B\sqrt{A}$ et $a > \|R\|$, et notons par E la mesure spectrale associé à R. Soient maintenant $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})\backslash\{0\}$. Alors*
1. Si $\lambda \in]0,1[$, alors $TX = \lambda XT$ si et seulement si

$$\sqrt{A}E(]-\infty, t])\sqrt{A}BX = \lambda X\sqrt{A}E(]-\infty, t/\lambda])\sqrt{A}B \ \forall t \in]-\lambda a, \lambda a[,$$
$$E(]-\infty, t])\sqrt{A}BX = 0 \ \forall t \in [-a, -\lambda a] \text{ et}$$
$$\sqrt{A}BX = E(]-\infty, t])\sqrt{A}BX \ \forall t \in [\lambda a, a].$$

2. Si $\lambda \in]-1, 0[$, alors $TX = \lambda XT$ si et seulement si

$$\sqrt{A}E(]t, a])\sqrt{A}BX = \lambda X\sqrt{A}E(]-\infty, t/\lambda])\sqrt{A}B \ \forall t \in]\lambda a, -\lambda a[,$$
$$E(]-\infty, t])\sqrt{A}BX = 0 \ \forall t \in [-a, \lambda a] \text{ et}$$
$$TX = E(]t, a])\sqrt{A}BX \ \forall t \in [-\lambda a, a].$$

3. Si $\lambda \in [1, +\infty[$, alors $TX = \lambda XT$ si et seulement si

$$\sqrt{A}E(]-\infty, t])\sqrt{A}BX = \lambda X\sqrt{A}E(]-\infty, t/\lambda])\sqrt{A}B \ \forall t \in]-a, a[,$$
$$X\sqrt{A}E(]-\infty, t/\lambda]) = 0 \ \forall t \in [-\lambda a, -a] \text{ et}$$
$$TX = \lambda X\sqrt{A}E(]-\infty, t/\lambda])\sqrt{A}B \ \forall t \in [a, \lambda a].$$

4. Si $\lambda \in]-\infty, -1]$, alors $TX = \lambda XT$ si et seulement si

$$\sqrt{A}E(]t, a])\sqrt{A}BX = \lambda X\sqrt{A}E(]-\infty, t/\lambda])\sqrt{A}B \ \forall t \in]-a, a[,$$
$$X\sqrt{A}E(]-\infty, t/\lambda]) = 0 \ \forall t \in [a, -\lambda a] \text{ et}$$
$$TX = \lambda X\sqrt{A}E(]-\infty, t/\lambda])\sqrt{A}B \ \forall t \in [\lambda a, -a].$$

Démonstration. Soient $x, y \in \mathcal{H}$. Nous allons montrer les assertions (1) et (4). Les deux autres peuvent être prouvées de la même manière. Pour cela, nous utiliserons la formule (4.1).

(1) Supposons que $TX = \lambda XT$, et soient $\alpha, \beta \in [0, \lambda a]$ tels que $0 < \alpha < \beta \leq \lambda a$, alors

$$\left(\int_\alpha^\beta dt - \lambda \int_{\alpha/\lambda}^{\beta/\lambda} dt\right) < TXx, y >= \int_\alpha^\beta < E(]-\infty, t])\sqrt{A}BXx, \sqrt{A}y > dt$$
$$- \lambda^2 \int_{\alpha/\lambda}^{\beta/\lambda} < E(]-\infty, t])\sqrt{A}Bx, \sqrt{A}X^*y > dt.$$

La séparabilité de $\mathcal{H}$ implique que

$$\sqrt{A}E(]-\infty, t])\sqrt{A}BX = \lambda X\sqrt{A}E(]-\infty, t/\lambda])\sqrt{A}B,$$

pour tout $t \in [0, \lambda a]$.
Si $\alpha, \beta \in [-\lambda a, 0]$ tels que $-\lambda a < \alpha < \beta \leq 0$, alors

$$0 = \int_\alpha^\beta < E(]-\infty, t])\sqrt{A}BXx, \sqrt{A}y > dt$$
$$- \lambda^2 \int_{\alpha/\lambda}^{\beta/\lambda} < E(]-\infty, t])\sqrt{A}Bx, \sqrt{A}X^*y > dt,$$

on obtient ainsi la même dernière égalité pour tout $t \in [-\lambda a, 0]$.
Soient maintenant $\alpha, \beta \in [-a, -\lambda a]$ tels que $-a < \alpha < \beta \leq -\lambda a$, alors

$$0 = \int_\alpha^\beta < E(]-\infty, t])\sqrt{A}BXx, \sqrt{A}y > dt.$$

Par conséquent, et comme T est injectif, on obtient

$$E(]-\infty, t])\sqrt{A}BX = 0,$$

pour tout $t \in [-a, -\lambda a]$.
Enfin, si $\alpha, \beta \in [\lambda a, a]$ tels que $\lambda a < \alpha < \beta \leq a$, alors

$$\int_\alpha^\beta dt < TXx, y >= \int_\alpha^\beta < E(]-\infty, t])\sqrt{A}BXx, \sqrt{A}y > dt$$

d'où

$$TX = \sqrt{A}E(]-\infty, t])\sqrt{A}BX,$$

ceci qui implique le résultat pour tout $t \in [\lambda a, a]$.

Réciproquement, on a

$$< TXx, y >=< \sqrt{A}E(]-a,a])\sqrt{A}BXx, y >,$$

et d'après les hypothèses,

$$\sqrt{A}E(]-a,-\lambda a])\sqrt{A}BX = \sqrt{A}E(]\lambda a,a])\sqrt{A}BX = 0,$$

d'où

$$< TXx, y >=< \sqrt{A}E(]-\lambda a,\lambda a])\sqrt{A}BXx, y > .$$

Or

$$\sqrt{A}E(]-\infty,t])\sqrt{A}BX = \lambda X\sqrt{A}E(]-\infty,t/\lambda])\sqrt{A}B,$$

pour tout $t \in]-\lambda a, \lambda a[$. Donc

$$< TXx, y >= \lambda < X\sqrt{A}E(]-a,a])\sqrt{A}Bx, y >=< \lambda XTx, y >,$$

ce qui implique $TX = \lambda XT$.

(4) Supposons que $TX = \lambda XT$, et soient $\alpha, \beta \in [0,a]$ tels que $0 < \alpha < \beta \leq a$, alors

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta dt < TXx, y >= \int_\alpha^\beta &< E(]-\infty,t])\sqrt{A}BXx, \sqrt{A}y > dt \\ &- \lambda^2 \int_{\beta/\lambda}^{\alpha/\lambda} < E(]-\infty,t])\sqrt{A}Bx, \sqrt{A}X^*y > dt.\end{aligned}$$

La séparabilité de $\mathcal{H}$ implique

$$TX = \sqrt{A}E(]-\infty,t])\sqrt{A}BX + \lambda X\sqrt{A}E(]-\infty,t/\lambda])\sqrt{A}B,$$

pour tout $t \in [0,a]$. Par conséquent

$$\sqrt{A}E(]t,a])\sqrt{A}BX = \lambda X\sqrt{A}E(]-\infty,t/\lambda])\sqrt{A}B,\ \forall t \in [0,a].$$

Si $\alpha, \beta \in [-a,0]$ tels que $-a < \alpha < \beta \leq 0$, alors

$$\begin{aligned}-\lambda\int_{\beta/\lambda}^{\alpha/\lambda} < TXx, y >= \int_\alpha^\beta &< E(]-\infty,t])\sqrt{A}BXx, \sqrt{A}y > dt \\ &- \lambda^2 \int_{\beta/\lambda}^{\alpha/\lambda} < E(]-\infty,t])\sqrt{A}Bx, \sqrt{A}X^*y > dt,\end{aligned}$$

on obtient ainsi la même dernière égalité pour tout $t \in [-a, 0]$.
Soient maintenant $\alpha, \beta \in [\lambda a, -a]$ tels que $\lambda a < \alpha < \beta \leq -a$, alors

$$-\lambda \int_{\beta/\lambda}^{\alpha/\lambda} < TXx, y >= -\lambda^2 \int_{\beta/\lambda}^{\alpha/\lambda} < E(]-\infty, t])\sqrt{A}Bx, \sqrt{A}X^*y > dt,$$

Il s'en suit que

$$TX = \lambda X\sqrt{A}E(]-\infty, t/\lambda])\sqrt{A}B,$$

pour tout $t \in [\lambda a, -a]$. Enfin, si $\alpha, \beta \in [a, -\lambda a]$ tels que $a < \alpha < \beta \leq -\lambda a$, alors

$$0 = -\lambda^2 \int_{\beta/\lambda}^{\alpha/\lambda} < E(]-\infty, t])\sqrt{A}Bx, \sqrt{A}X^*y > dt,$$

d'où

$$X\sqrt{A}E(]-\infty, t/\lambda])\sqrt{A}B = 0.$$

Alors, l'image dense de A et B implique le résultat pour tout $t \in [a, -\lambda a]$.

Réciproquement, on a

$$TX = \sqrt{A}E(]-a, a])\sqrt{A}BX,$$

et d'après les hypothèses,

$$\begin{aligned}\sqrt{A}E(]-a, a])\sqrt{A}BX =& \lambda X\sqrt{A}E(]-\infty, a/\lambda])\sqrt{A}B \\ &- \lambda X\sqrt{A}E(]-\infty, -a/\lambda])\sqrt{A}B.\end{aligned}$$

d'où

$$TX = \lambda X\sqrt{A}E(]a/\lambda, -a/\lambda])\sqrt{A}B.$$

Or

$$X\sqrt{A}E(]-a/\lambda, a])\sqrt{A}B = X\sqrt{A}E(]-a, a/\lambda])\sqrt{A}B = 0,$$

donc

$$TX = \lambda X\sqrt{A}E(]-a, a])\sqrt{A}B = \lambda XT,$$

et le théorème est bien prouvé. $\square$

En posant, dans le dernier théorème $A = I$ et $B = T$, on obtient immédiatement le corollaire suivant.

Corollaire 4.4. *Soit $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ un opérateur autoadjoint injectif et soit $a > \|T\|$. Notons par E le mesure spectrale associée à T. Soient maintenant $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})\backslash\{0\}$. Alors*
1. Si $\lambda \in]0,1[$, alors $TX = \lambda XT$ si et seulement si

$$E(]-\infty,t])X = XE(]-\infty,t/\lambda]) \ \forall t \in]-\lambda a, \lambda a[,$$
$$E(]-\infty,t])X = 0 \ \forall t \in [-a,-\lambda a] \text{ et}$$
$$E(]-\infty,t])X = X \ \forall t \in [\lambda a, a].$$

2. Si $\lambda \in]-1,0[$, alors $TX = \lambda XT$ si et seulement si

$$X = E(]-\infty,t])X - XE(]-\infty,t/\lambda]) \ \forall t \in]\lambda a, -\lambda a[,$$
$$E(]-\infty,t])X = 0 \ \forall t \in [-a,\lambda a] \text{ et}$$
$$E(]-\infty,t])X = X \ \forall t \in [-\lambda a, a].$$

3. Si $\lambda \in [1,+\infty[$, alors $TX = \lambda XT$ si et seulement si

$$E(]-\infty,t])X = XE(]-\infty,t/\lambda]) \ \forall t \in]-a, a[,$$
$$XE(]-\infty,t/\lambda]) = 0 \ \forall t \in [-\lambda a,-a] \text{ et}$$
$$XE(]-\infty,t/\lambda]) = X \ \forall t \in [a, \lambda a].$$

4. Si $\lambda \in]-\infty,-1]$, alors $TX = \lambda XT$ si et seulement si

$$X = E(]-\infty,t])X - XE(]-\infty,t/\lambda]) \ \forall t \in]-a, a[,$$
$$XE(]-\infty,t/\lambda]) = 0 \ \forall t \in [a,-\lambda a] \text{ et}$$
$$XE(]-\infty,t/\lambda]) = X \ \forall t \in [\lambda a, -a].$$

Exemple 4.5. Soit T un opérateur compact autoadjoint défini sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, tel que $\sigma_p(T) = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $\lambda_i \neq \lambda_j$ pour tout $i \neq j$. Soit a un nombre positif tel que $a > \max\{|\lambda_i| : i \in \mathbb{N}\}$. Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $\mathfrak{m}(\lambda_n)$ la multiplicité (finie) de la valeur propre λ_n, et par $(e_{n,l})_{l=1}^{\mathfrak{m}(\lambda_n)}$ la base orthonormale du sous espace propre associé à λ_n. Il est connu alors que l'ensemble $\{e_{n,l} : n \in \mathbb{N}^*, l = 1, ..., \mathfrak{m}(\lambda_n)\}$ forme une base orthonormale de $\mathcal{H}$.

Si l'on note par E la mesure spectrale associée à T, alors pour tout $\lambda \in \sigma(T)$, $E(\{\lambda\})$ est la projection orthogonale sur le sous espace propre associé à λ. D'après le corollaire 4.4, $\sigma_{ext}(T) \subset \mathbb{R}^*$ et si $\lambda \in]0,1[$, et $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})\backslash\{0\}$ alors $TX = \lambda XT$ si et seulement si $E(\{t\})X = XE(\{t/\lambda\})$ pour tout $t \in]-\lambda a, \lambda a[$, $E(\{t\})X = 0$ pour tout $t \in [-a, -\lambda a]$ et $E(\{t\})X = X$ pour tout $t \in [\lambda a, a]$. Donc, X est une solution de $TX = \lambda XT$ si et seulement s'il existe $\lambda_i, \lambda_j \in \sigma_p(T)$ tels que $\lambda = \frac{\lambda_i}{\lambda_j}$, et dans ce cas

$$Xe_{n,l} = \begin{cases} \sum_{k=1}^{\mathfrak{m}(\lambda_m)} c_{kl} e_{m,k} & \text{si } \frac{\lambda_m}{\lambda_n} = \frac{\lambda_i}{\lambda_j} \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

On déduit, de la même manière, les autres cas de $\lambda \in \mathbb{R}^*$. En particulier, on obtient $\sigma_{ext}(T) = \{\frac{\lambda_i}{\lambda_j} : i, j \in \mathbb{N}\}$ et pour tout $i, j \in \mathbb{N}$, on a

$$E_{ext}(\frac{\lambda_i}{\lambda_j}) = Vect\{\sum_{k=1}^{\mathfrak{m}(\lambda_m)} \sum_{l=1}^{\mathfrak{m}(\lambda_n)} c_{kl} e_{m,k} \otimes e_{n,l} \ \forall m, n \in \mathbb{N} \ tels \ que \ \frac{\lambda_m}{\lambda_n} = \frac{\lambda_i}{\lambda_j}\}.$$

Exemple 4.6. On traite dans cet exemple une autre classe d'opérateurs autoadjoints injectifs, plus précisément, on considère des opérateurs sans spectre ponctuel, et tels que le zéro appartient au spectre continu. Pour simplifier, on va traiter le cas où la multiplicité spectrale est égale à 1.

Soit alors $T \in \mathcal{B}(L^2[0,1])$ défini par

$$Tf(x) = xf(x), \ \forall f \in L^2[0,1] \ \forall x \in [0,1], \tag{4.2}$$

il est connu que T est un opérateur autoadjoint et que $\sigma(T) = \sigma_c(T) = [0,1]$. Soit $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ une fonction mesurable. L'opérateur C_φ est dit de composition s'il est défini par $C_\varphi f(x) = f(\varphi(x))$. L'opérateur de composition $C_{\lambda x}$, va être simplement noté par C_λ. De plus, si $\varphi \in L^\infty[0,1]$, on définit l'opérateur de multiplication par φ comme $M_\varphi f(x) = \varphi(x)f(x)$.

Dans cet exemple, on peut utiliser le corollaire 4.4 pour décrire les ensembles des valeurs propres et des vecteurs propres étendus de l'opérateur T. En effet, si l'on note par E le mesure spectrale associée à T, alors pour tout $\lambda \in [0,1]$, $E(\{[0,\lambda]\}) = \chi_{[0,\lambda]}$. On peut alors obtenir le résultat de la même manière comme dans le dernier exemple.

Cependant, on va traiter cet exemple autrement en utilisant la théorie des fonctions, une telle méthode qui va avoir son propre intérêt. Supposons pour cela que λ soit un nombre complexe et que X soit un opérateur borné sur $L^2[0,1]$ tels que $TX = \lambda XT$. Notons d'abord, puisque T est injectif, que $X = 0$ est l'unique solution de l'équation $TX = 0$, on peut alors supposer que $\lambda \in \mathbb{C}^*$. D'après les hypothèses, pour tout $f \in L^2[0,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$T^n X f = \lambda^n X T^n f,$$

ce qui implique en particulier

$$Xp(t) = p(\frac{t}{\lambda})X\mathbf{1}, \ \forall\, p \in \mathbb{C}[X]. \tag{4.3}$$

Supposons dans un premier temps que $\lambda \in \mathbb{C}\backslash[0,\infty[$ et posons $K = [0,1] \cup [0, \frac{1}{\lambda}]$. Soit $f \in L^2[0,1]$, alors f peut être vue comme élément de $L^2(K)$ si l'on pose $f_{|]0,1/\lambda]} = 0,\ p.\ p.$ D'après le théorème 2.15, il existe une suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}[X]$ qui converge vers f dans $L^2(K)$. Ainsi,

$$Xf(t) = \lim_{n\to\infty} Xp_n(t) = \lim_{n\to\infty} p_n(\frac{t}{\lambda})X\mathbf{1} = 0,\ p.\ p.\ t \in [0,1].$$

D'où $X = 0$. Par conséquent $\sigma_{ext}(T) \subset]0,\infty[$, en cohérence avec le corollaire 4.4. En plus, et en utilisant l'équation (4.3) on peut facilement montrer que $\sigma_{ext}(T) =]0,\infty[$ et que

- Si $\lambda \in]0,1]$, alors $TX = \lambda XT$ si et seulement si $XC_\lambda = M_{X1}$.
- Si $\lambda \in]1,\infty[$, alors $TX = \lambda XT$ si et seulement si $X = M_{X1}C_{1/\lambda}$.

Corollaire 4.7. *Soit $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ une fonction mesurable. Alors $TC_\varphi = \lambda C_\varphi T$ si et seulement si $\lambda \geq 1$ et $\varphi(x) = x/\lambda$, pour tout $x \in [0,1]$.*

Démonstration. Il est clair que $C_\varphi \mathbf{1} = \mathbf{1}$. Supposons que $\lambda \in]0,1[$, alors d'après le dernier résultat $TC_\varphi = \lambda C_\varphi T$ si et seulement si $C_\varphi C_\lambda = I$ ce qui contredit le fait que C_λ n'est pas inversible à gauche. Supposons maintenant que $\lambda \geq 1$, alors $TC_\varphi = \lambda C_\varphi T$ si et seulement si $C_\varphi = C_{1/\lambda}$, ce qui achève la preuve du corollaire.

□

4.2 Opérateurs normaux

Étant donné un opérateur normal N.Tout d'abord, il est connu que si N n'est pas injectif, alors N^* ne le sera pas non plus, et dans ce cas $\sigma_{ext}(N) = \mathbb{C}$. Pour cela, on va considérer le cas où N est injectif. Dans ce paragraphe on se demande si le corollaire 4.4 peut être généralisé au cas $T = N$. En fait, le corollaire 4.10 montre que la réponse à cette question est positive. Pour montrer ce corollaire, on aura d'abord besoin de quelques résultats.

Théorème 4.8. *Soient $N, M \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ deux opérateurs normaux et notons par E^N et E^M les mesures spectrales associées à N et M respectivement. Si $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ alors $NX = XM$ si et seulement si*

$$\begin{cases} E^N(\Delta)X = XE^M(\Delta) & \forall \Delta \in \mathcal{B}or(\sigma(N) \cap \sigma(M)), \\ E^N(\Delta)X = 0 & \forall \Delta \in \mathcal{B}or(\sigma(N)) \textit{ tel que } \Delta \cap \sigma(M) = \emptyset, \\ XE^M(\Delta) = 0 & \forall \Delta \in \mathcal{B}or(\sigma(M)) \textit{ tel que } \Delta \cap \sigma(N) = \emptyset, \end{cases}$$

où $\mathcal{B}or(\Omega)$ signifie l'ensemble de tous les boréliens dans l'ensemble compact Ω.

Démonstration. Supposons tout d'abord que $NX = XM$, alors d'après le théorème de Fuglede-Putnam, on a $N^*X = XM^*$. D'où

$$N^k X = XM^k \quad et \quad N^{*k} X = XM^{*k},$$

pour tout $k \geq 0$. Alors pour tout polynôme $p(z, \overline{z})$ dont les variables sont z et $\overline{z}$,

$$p(N, N^*)X = Xp(M, M^*).$$

Par conséquent,

$$u(N)X = Xu(M),$$

pour toute fonction $u \in C(\sigma(N) \cup \sigma(M))$. Posons $\Pi := \sigma(N) \cap \sigma(M)$ et $\tau = \{\Delta \in \mathcal{B}or(\Pi) : E^N(\Delta)X = XE^M(\Delta)\}$. On vérifie alors que τ est une $\sigma-$algèbre. Soit Λ un ensemble ouvert de Π, il existe alors une suite (u_n) de fonctions positives sur Π telle que $u_n(z) \uparrow \chi_\Lambda(z)$ pour tout z. Alors, on obtient facilement $E^N(\Lambda)X = XE^M(\Lambda)$. Donc τ contient tous les ouverts de Π. Ainsi, ce dernier doit contenir tous les boréliens de Π. De manière analogue, on montre les deux autres cas. Réciproquement, les hypothèses entraînent $f(N)X = Xf(M)$ pour toute fonction étagère f définie sur $\sigma(N) \cup \sigma(M)$. Le résultat découle alors en approchant la fonction z par une suite de fonctions étagées. □

Lemme 4.9. *Soient N un opérateur normal injectif et λ un nombre complexe non nul. Notons par E^N et $E^{\lambda N}$ les mesures spectrales associées à N et λN respectivement. Alors*

$$E^{\lambda N}(\Delta) = E^N(\frac{\Delta}{\lambda}), \ \forall \Delta \in \mathcal{B}or(\sigma(\lambda N)).$$

Démonstration. Soient $x, y \in \mathcal{H}$, et considérons la fonction

$$\begin{array}{cccc} \varphi & : & \sigma(N) & \to & \sigma(\lambda N) \\ & & z & \mapsto & \lambda z \end{array}$$

alors

$$\begin{aligned} < E^{\lambda N}(\Delta)x, y > &= \int \mathbf{1}_\Delta(z) dE^{\lambda N}_{x,y}(z) \\ &= \int \mathbf{1}_\Delta(z) d\varphi(E^N_{x,y})(z) \\ &= \int \mathbf{1}_\Delta(\lambda z) dE^N_{x,y}(z) \\ &=< E^N(\frac{\Delta}{\lambda})x, y > . \end{aligned}$$

□

Corollaire 4.10. *Soit N un opérateur normal avec E pour mesure spectrale associée. Alors $NX = \lambda XN$ si et seulement si*

$$\begin{cases} E(\Delta)X = XE(\frac{\Delta}{\lambda}) & \forall \Delta \in \mathcal{B}or(\sigma(N) \cap \sigma(\lambda N)), \\ E(\Delta)X = 0 & \forall \Delta \in \mathcal{B}or(\sigma(N)) \text{ tel que } \Delta \cap \sigma(\lambda N) = \emptyset, \\ XE(\frac{\Delta}{\lambda}) = 0 & \forall \Delta \in \mathcal{B}or(\sigma(\lambda N)) \text{ tel que } \Delta \cap \sigma(N) = \emptyset, \end{cases}$$

Alors, on obtient le théorème essentiel de ce paragraphe.

Théorème 4.11. *Soit N un opérateur normal avec E pour mesure spectrale associée. Alors*

$$\sigma_{ext}(N) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \exists \Delta \in \mathcal{B}or(\sigma(N) \cap \sigma(\lambda N)) \text{ tel que } E(\Delta) \neq 0\}.$$

Exemple 4.12. Soit $R > 0$, et posons $D := D(0, R]$ le disque fermé de centre 0 et de rayon R, et considérons sur $L^2(D)$ l'opérateur normal N défini par $Nf(z) = zf(z)$ pour tout $f \in L^2(D)$. Si l'on note par E la mesure spectrale associée à N, alors $E(\Delta) = M_{\chi_\Delta}$. Il est facile de vérifier que $\sigma_{ext}(N) = \mathbb{C}^*$ et que si $0 < |\lambda| < 1$ alors $X \in E_{ext}(\lambda)$ si et seulement s'il existe $\varphi \in L^2(D)$ telle que

$$Xf(z) = \begin{cases} \varphi(z)f(\frac{z}{\lambda}) & \text{si } |z| \leq |\lambda|R, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si $|\lambda| \geq 1$ alors $X \in E_{ext}(\lambda)$ si et seulement s'il existe $\varphi \in L^2(D)$ ($L^\infty(D)$ pour $|\lambda| = 1$) telle que

$$Xf(z) = \varphi(z)f(\frac{z}{\lambda}).$$

On laisse au lecteur le soin de vérifier que ces vecteurs propres étendus sont en cohérence avec le corollaire 4.10.

Maintenant, soient $0 < r_1 < r_2 < +\infty$ et posons $D := D[r_1, r_2]$ l'anneau fermé situé entre les deux cercles de centre 0 et de rayons r_1, r_2. Considérons le même dernier opérateur normal N défini sur $L^2(D)$. On obtient que $\sigma_{ext}(N) = D]\frac{r_1}{r_2}, \frac{r_2}{r_1}[$, et que si $\frac{r_1}{r_2} < |\lambda| < 1$ alors $X \in E_{ext}(\lambda)$ si et seulement s'il existe $\varphi \in L^2(D)$ telle que

$$Xf(z) = \begin{cases} \varphi(z)f(\frac{z}{\lambda}) & \text{si } |z| \leq |\lambda|r_2, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si $1 \leq |\lambda| < \frac{r_2}{r_1}$ alors $X \in E_{ext}(\lambda)$ si et seulement s'il existe $\varphi \in L^2(D)$ ($L^\infty(D)$ pour $|\lambda| = 1$) telle que

$$Xf(z) = \begin{cases} \varphi(z)f(\frac{z}{\lambda}) & \text{si } |z| \geq |\lambda| r_1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Et le corollaire 4.10 reste vérifié.

Chapitre 5

Applications et exemples

Dans ce chapitre, nous appliquons les résultats que nous avons évoqués dans les chapitres précédents pour décrire le spectre étendu de quelques opérateurs avec nos propres méthodes.

5.1 Cellules de Jordan

Dans ce paragraphe, on donne une description complète des sous espaces propres étendus de large classe d'opérateurs agissant sur un espace de Hilbert de dimension finie. Faisons tout d'abord la remarque suivante.

Remarque 5.1. *Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert quelconque, et T un opérateur de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Supposons qu'il existe deux opérateurs S et U de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, avec U est un opérateur inversible, tels que $T = U^{-1}SU$. Alors on montre facilement que $\sigma_{ext}(T) = \sigma_{ext}(S)$. De plus, pour tout $\lambda \in \sigma_{ext}(T)$, $E_{ext}(T, \lambda) = U^{-1}E_{ext}(S, \lambda)U$.*

Définissons tout d'abord la cellule de Jordan. Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert de dimension p, et $\{e_{i,j} : i = 1, ..., k \text{ et } j = 1, ..., p_i\}$ une base de $\mathcal{H}$, et soit J la cellule de Jordan définie sur $\mathcal{H}$ par

$$Je_{i,j} = \begin{cases} \lambda_i e_{i,1} & \text{si } j = 1 \\ e_{i,j-1} + \lambda_i e_{i,j} & \text{sinon,} \end{cases} \tag{5.1}$$

avec $\lambda_i \neq \lambda_{i'}$ pour tout $i \neq i'$, et $i = 1, ..., q$ (q représente le nombre de blocs dans la cellule J, et p_i est la multiplicité de la valeur λ_i associée à chaque bloc, i.e., $\sum_{i=1}^{q} p_i = p$). Alors, l'opérateur J possède dans la base $(e_{i,j})$ la matrice suivante

$$M(J) = \begin{bmatrix} M(J_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & M(J_2) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & M(J_q) \end{bmatrix},$$

où

$$M(J_i) := \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & \ddots & \lambda_i & 1 \\ 0 & & \cdots & & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}.$$

Considérons maintenant l'opérateur T agissant sur un espace de Hilbert complexe de dimension finie. Le théorème de Jordan nous informe que si les sous espaces propres associés aux valeurs propres λ_i sont tous de dimension 1, alors T admet une représentation matricielle diagonale par blocs de la forme $M(J)$ ci-dessous ; c'est-à-dire il existe un opérateur inversible U et un opérateur J de la forme (5.1), tels que $T = U^{-1}JU$. Grâce à la remarque 5.1, il suffit de décrire les sous espaces propres étendus de J pour avoir ceux de n'importe quel opérateur en dimension finie. Pour cela, on aura d'abord besoin du lemme suivant.

Lemme 5.2. *Soit J un opérateur de Jordan défini par (5.1), et notons pour tout $i = 1, ..., q$, $E_i := Vect\{e_{i,1}, ..., e_{i,p_i}\}$. Alors pour tout $i = 1, ..., q$, on a*

1. *Les sous-espaces E_i sont invariants par rapport à J.*
2. *Si $l \in \{1, ..., p_i\}$, alors pour tout $k = 0, 1, ..., l-1$, on a*

$$(J - \lambda_i I)^k e_{i,l} \neq 0, \text{ et } (J - \lambda_i I)^l e_{i,l} = 0.$$

En particulier, $\ker(J-\lambda_i I)^l = Vect\{e_{i,1},...,e_{i,l}\}$*, et pour tout* $k \geq p_i$*, on a* $\ker(J-\lambda_i I)^k = \ker(J-\lambda_i I)^{p_i} = E_i$.

Démonstration. La preuve est analogue à celle du corollaire 3.22. □

On peut à présent montrer le théorème essentiel de ce paragraphe.

Théorème 5.3. *Soit* J *un opérateur de Jordan défini par (5.1), et supposons que* $\lambda_i \neq 0$ *pour tout* $i = 1,...,q$*. Soit* $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$*, alors*

$$\sigma_{ext}(J) = \{\frac{\lambda_i}{\lambda_j} : i,j = 1,...,q\},$$

et pour tous $i,j \geq 1$*,* $X \in E_{ext}(\frac{\lambda_i}{\lambda_j})\backslash\{0\}$ *si et seulement si pour tout* $n \in \{1,...,q\}$ *on a*

1. *S'il existe* $m \in \{1,...,q\}$ *tel que* $\lambda_m/\lambda_n = \lambda_i/\lambda_j$*, alors il existe* $l \in \{\max(p_j-p_i+1,1),...,p_j\}$*, tel que pour tout* $k = 0,...,p_j-l$*,*

$$Xe_{n,l+k} = \sum_{r=0}^{k} c_r(m,n)(\frac{\lambda_m}{\lambda_n})^{k-r} e_{m,k+1-r},$$

où $c_i(m,n) \in \mathbb{C}$ *avec au moins l'une des constantes* $c_0(m,n)$ *correspondants à l'une de telles paires* (m,n)*, est non-nulle.*

2. *Si* $\lambda_m/\lambda_n \neq \lambda_i/\lambda_j$ *pour tout* $m \in \{1,...,q\}$*, alors*

$$Xe_{n,k} = 0 \quad \forall k = 1,...,p_n.$$

Démonstration. Soient $\lambda \in \mathbb{C}$ et $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tels que

$$JX = \lambda XJ.$$

D'après la définition de J, on obtient pour tout $j \in \{1,...,q\}$

$$JXe_{j,l} = \begin{cases} \lambda\lambda_j Xe_{j,1} & \text{si } l = 1 \\ \lambda Xe_{j,l-1} + \lambda\lambda_j Xe_{j,l} & \text{si } l = 2,...,p_j. \end{cases}$$

Supposons maintenant que $X \neq 0$, alors il existe forcément $i, j \in \{1, ..., q\}$, $l \in \{1, ..., p_j\}$ et $c_0 \in \mathbb{C}^*$ tels que

$$\lambda = \frac{\lambda_i}{\lambda_j} \; et \; Xe_{j,l} = c_0 e_{i,1}.$$

Par conséquent

$$JXe_{j,l+1} = \frac{\lambda_i}{\lambda_j} X(e_{j,l} + \lambda_j e_{j,l+1}), \tag{5.2}$$

équivaut à

$$(J - \lambda_i I)Xe_{j,l+1} = \frac{\lambda_i}{\lambda_j} c_0 e_{i,l}.$$

D'où, il existe deux scalaires $c_0^{(1)} \neq 0$ et c_1 tels que

$$Xe_{j,l+1} = c_0^{(1)} e_{i,2} + c_1 e_{i,1},$$

alors (5.2) implique

$$c_0^{(1)}(\lambda_i e_{i,2} + e_{i,1}) + c_1 \lambda_i e_{i,1} = \lambda_i (c_0^{(1)} e_{i,2} + c_1 e_{i,1}) + \frac{\lambda_i}{\lambda_j} c_0 e_{i,1},$$

de fait

$$c_0^{(1)} = \frac{\lambda_i}{\lambda_j} c_0.$$

En répétant cette procédure un nombre de fois égal à $min(p_i - 2, l - 1)$, on obtient

$$Xe_{j,l+k} = \sum_{r=0}^{k} c_r (\frac{\lambda_i}{\lambda_j})^{k-r} e_{i,k+1-r},$$

pour tout $k = 0, ..., p_j - l$.
Maintenant, supposons que $p_i < p_j$. Si on choisit $l = p_j - p_i$ (ou même $l < p_j - p_i$), on aurait

$$Xe_{j,p_j-1} = \sum_{r=0}^{p_i-1} c_r (\frac{\lambda_i}{\lambda_j})^{p_i-1-r} e_{i,p_i-r}.$$

D'où,

$$(J-\lambda_i I)Xe_{j,p_j} = \frac{\lambda_i}{\lambda_j}Xe_{j,p_j-1} = \sum_{r=0}^{p_i-1} c_r(\frac{\lambda_i}{\lambda_j})^{p_i-r}e_{i,p_i-r}.$$

En appliquant l'opérateur $(J-\lambda_i I)^{p_i-1}$ sur les deux membres dans la dernière équation, on obtient que

$$(J-\lambda_i I)^{p_i}Xe_{j,p_j} = c_0(\frac{\lambda_i}{\lambda_j})^{p_i}e_{i,1}.$$

D'après le corollaire précédent, E_i est invariant par rapport à $(J-\lambda_i I)$. De plus, $\ker(J-\lambda_i I)^{p_i} = E_i$, alors forcément $c_0 = 0$, ce qui contredit le fait que $Xe_{i,l} \neq 0$. Par conséquent, si X est une solution non triviale de l'équation

$$JX = \frac{\lambda_i}{\lambda_j}XJ, \tag{5.3}$$

alors, il existe $l \in \{\max(p_j - p_i + 1, 1), ..., p_j\}$ tel que

$$Xe_{j,l+k} = \sum_{r=0}^{k} c_r(\frac{\lambda_i}{\lambda_j})^{k-r}e_{i,k+1-r},$$

pour tout $k = 0, ..., p_j - l$.
Maintenant, supposons que n soit un entier positif différent de j (i.e., $\lambda_n \neq \lambda_j$). Alors

$$JXe_{n,l} = \begin{cases} \frac{\lambda_i}{\lambda_j}\lambda_n Xe_{n,1} & \text{si } l = 1 \\ \frac{\lambda_i}{\lambda_j}Xe_{n,l-1} + \frac{\lambda_i}{\lambda_j}\lambda_n Xe_{n,l} & \text{si } l = 2, ..., p_n. \end{cases}$$

En utilisant de nouveau le lemme 5.2, s'il existe $l \in \{1, ..., p_n\}$ tel que $Xe_{n,l} \neq 0$, alors forcément il existe un entier positif m (différent de i) tel que

$$\frac{\lambda_i}{\lambda_j} = \frac{\lambda_m}{\lambda_n},\ et\ Xe_{n,l} = c_0 e_{m,1},\ (c_0 \neq 0) \in \mathbb{C}.$$

Dans ce cas, et par les mêmes arguments, on obtient un comportement de X sur $e_{n,l}$ analogue au cas de $e_{j,l}$.

Montrons maintenant la réciproque. Il suffit de vérifier l'équation (5.3) sur les éléments de la base $(e_{i,j})$. Soit $n \in \{1, ..., q\}$, on va distinguer les deux cas suivants :
Si $Xe_{n,k} = 0$, on vérifie facilement que

$$JXe_{n,r} = \frac{\lambda_i}{\lambda_j} XJe_{n,r} = 0, \ \forall r = 1, ..., k.$$

Supposons dans le deuxième cas qu'il existe $l \in \{1, ..., p_n\}$ et $k \in \{0, ..., p_n - l\}$ tels que $Xe_{n,l+k} \neq 0$ (il existe forcément dans ce cas $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $\lambda_m/\lambda_n = \lambda_i/\lambda_j$). Alors, si $l + k = \max(p_j - p_i + 1, 1)$ (i.e., $l = \max(p_j - p_i + 1, 1)$ et $k = 0$), par calcul simple on obtient

$$JXe_{n,l} = \frac{\lambda_i}{\lambda_j} XJe_{n,l} = \lambda_m c_0 e_{m,1}.$$

Si $l + k > \max(p_j - p_i + 1, 1)$, alors

$$\begin{aligned}
&JXe_{n,l+k} \\
&= J\left(\sum_{r=0}^{k} c_r(m,n)(\frac{\lambda_m}{\lambda_n})^{k-r} e_{m,k+1-r}\right) \\
&= \sum_{r=0}^{k-1} c_r(m,n)(\frac{\lambda_m}{\lambda_n})^{k-r} e_{m,k-r} + \lambda_m \sum_{r=0}^{k-1} c_r(m,n)(\frac{\lambda_m}{\lambda_n})^{k-r} e_{m,k+1-r} \\
&\quad + \lambda_m c_k(m,n) e_{m,1} \\
&= \sum_{r=0}^{k-1} c_r(m,n)(\frac{\lambda_m}{\lambda_n})^{k-r} e_{m,k-r} + \lambda_m \sum_{r=0}^{k} c_r(m,n)(\frac{\lambda_m}{\lambda_n})^{k-r} e_{m,k+1-r}.
\end{aligned}$$

Quant au deuxième membre

$$\begin{aligned}
&\frac{\lambda_i}{\lambda_j} XJe_{n,l+k} \\
&= \frac{\lambda_m}{\lambda_n} X(e_{n,l+k-1} + \lambda_n e_{n,l+k}) \\
&= \sum_{r=0}^{k-1} c_r(m,n)(\frac{\lambda_m}{\lambda_n})^{k-r} e_{m,k-r} + \lambda_m \sum_{r=0}^{k} c_r(m,n)(\frac{\lambda_m}{\lambda_n})^{k-r} e_{m,k+1-r}.
\end{aligned}$$

D'où l'équation désirée, et le théorème est démontré. $\square$

Le corollaire suivant concerne la dimension des sous espaces propres étendus.

Corollaire 5.4. *Supposons que J soit un opérateur de Jordan défini par (5.1), avec $\lambda_i \neq 0$ pour tout $i = 1, ..., q$. Si l'on note par $\Omega_{i,j} = \{(m, n) \in \{1, ..., q\}^2 : \lambda_m/\lambda_n = \lambda_i/\lambda_j\}$. Alors*

$$dimE_{ext}(\frac{\lambda_i}{\lambda_j}) = \sum_{(m,n)\in\Omega_{i,j}} \min(p_m, p_n).$$

Remarque 5.5. *Avec les hypothèses du dernier corollaire, et si l'on ordonne les valeurs propres λ_i par croissance de leurs multiplicités (c'est-à-dire, $p_i \leq p_j$ implique $i \leq j$), alors on a*

$$\sum_{i=1}^{q} dimE_{ext}(\frac{\lambda_i}{\lambda_j}) = 2\sum_{i=1}^{q-1} p_i(q-i) + p.$$

De plus, $\sum_{i=1}^{q} dimE_{ext}(\frac{\lambda_i}{\lambda_j}) = p^2$ si et seulement si $p_i = 1$ pour tout i (c'est-à-dire $p = q$).

Supposons enfin qu'il existe $i \in \{1, ..., k\}$ tel que $\lambda_i = 0$, alors $\sigma_{ext}(T) = \mathbb{C}$, avec $e_{i,1} \otimes e_{i,p_i} \in E_{ext}(\lambda)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$. Supposons de plus (sans perte de généralité) que $\lambda_1 = 0$, et notons par

$$\Sigma := \{\frac{\lambda_i}{\lambda_j} : i = 1, ..., q, \quad j = 2, ..., q\},$$

alors on a le théorème suivant, dont la preuve est analogue à celle du théorème 5.3.

Théorème 5.6. *Soit J un opérateur de Jordan défini par (5.1), et supposons que $\lambda_1 = 0$, alors $\sigma_{ext}(J) = \mathbb{C}$. De plus, on distingue les trois cas suivants :*
- Si $\lambda \notin \Sigma$, alors $E_{ext}(\lambda) = Vect\{e_{1,1} \otimes e_{1,p_1}\}$.
- Si $\lambda = 0$ alors $E_{ext}(0) = Vect\{e_{1,1} \otimes e_{n,j} : n = 1, ..., q, \quad j = 1, ..., p_n\}$.

- Et si $\lambda \in \Sigma \backslash \{0\}$ (c'est-à-dire il existe $i = 2, ..., q$, $j = 2, ..., q$ tels que $\lambda = \frac{\lambda_i}{\lambda_j}$), alors $X \in E_{ext}(\frac{\lambda_i}{\lambda_j}) \backslash \{0\}$ si et seulement si $Xe_{1,p_1} = be_{1,1}$, et pour tout $n \in \{2, ..., q\}$ on a

1. *S'il existe $m \in \{2, ..., q\}$ tel que $\lambda_m/\lambda_n = \lambda_i/\lambda_j$, alors il existe $l \in \{\max(p_j - p_i + 1, 1), ..., p_j\}$, tel que pour tout $k = 0, ..., p_j - l$,*

$$Xe_{n,l+k} = \sum_{r=0}^{k} c_r(m,n)(\frac{\lambda_m}{\lambda_n})^{k-r} e_{m,k+1-r},$$

   où $b, c_i(m,n) \in \mathbb{C}$ avec au moins l'une des constantes b ou $c_0(m,n)$ correspondants à l'une de telles paires (m,n), est non-nulle.

2. *Si $\lambda_m/\lambda_n \neq \lambda_i/\lambda_j$ pour tout $m \in \{2, ..., q\}$, alors*

$$Xe_{n,k} = 0 \quad \forall k = 1, ..., p_n.$$

5.2 Spectre étendu d'opérateurs compacts quasinilpotents

Dans ce paragraphe, on traite l'opérateur compact quasinilpotent de Volterra. On retrouve le résultat de A. Biswas, A. Lambert et S. Petrovic [4], sur l'ensemble du spectre étendu de V. Ces trois derniers auteurs utilisent la théorie des semigroupes de classe C_0 pour montrer que $\sigma_{ext}(V) \subset]0, \infty[$. Grâce au lemme 2.15, on montre cette dernière inclusion, et au même temps on obtient le résultat de Karaev [25] en ce qui concerne l'ensemble des vecteurs propres étendus de V associés à chaque valeur propre étendue. Enfin, on utilise ces résultats pour montrer l'existence d'un opérateur compact quasinilpotent dont le spectre étendu est réduit au singleton $\{1\}$. Cette démonstration a été donnée par S. Shkarin dans [45].

Avant de donner le théorème suivant, on aura besoin de définir l'opérateur de Duhamel. Soit $f \in L^2[0,1]$, notons par $\mathcal{K}_f$ l'opérateur produit de convolution par f, défini sur toute fonction $g \in L^2[0,1]$ par

$$\mathcal{K}_f g(x) = (f * g)(x) = \int_0^x f(x-t)g(t)dt, \quad \forall x \in [0,1].$$

On appelle opérateur de Duhamel de symbole f, et on le note par $\mathcal{D}_f$, l'application linéaire bornée définie sur $L^2[0,1]$ par

$$\mathcal{D}_f g(x) = (f \circledast g)(x) = \frac{d}{dx}\mathcal{K}_f g(x), \quad \forall x \in [0,1].$$

Théorème 5.7. *Soit $X \in \mathcal{B}(L^2[0,1])\backslash\{0\}$, alors $\sigma_{ext}(V) =]0,\infty[$. En plus,*

1. *si $\lambda \in]0,1]$, alors $VX = \lambda XV$ si et seulement si $XC_\lambda = \mathcal{D}_{X\mathbf{1}}$;*
2. *si $\lambda \in]1,\infty[$, alors $VX = \lambda XV$ si et seulement si $X = \mathcal{D}_{X\mathbf{1}}C_{1/\lambda}$.*

Démonstration. Notons d'abord que V est injectif, donc $\lambda = 0$ ne peut pas être une valeur propre étendue de V. On peut alors supposer que $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Supposons ensuite qu'il existe $X \in \mathcal{B}(L^2[0,1])$, tel que $VX = \lambda XV$, alors pour tout $f \in L^2[0,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$V^n X f = \lambda^n X V^n f.$$

En particulier

$$V^n X\mathbf{1} = \lambda^n X V^n \mathbf{1},$$

pour tout $n \geq 1$, ce qui implique

$$X\left(\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} * \mathbf{1}\right) = \frac{1}{\lambda^n}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} * X\mathbf{1},$$

ou

$$X\frac{x^n}{n!} = \frac{1}{\lambda^n}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} * X\mathbf{1}, \quad \forall n \geq 1.$$

En appliquant le produit de convolution à gauche par la fonction $\mathbf{1}$, on obtient

$$\mathbf{1} * X\frac{x^n}{n!} = \frac{1}{\lambda^n}\left(\mathbf{1} * \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right) * X\mathbf{1},$$

d'où

$$VX\frac{x^n}{n!} = \frac{(x/\lambda)^n}{n!} * X\mathbf{1}, \quad \forall n \geq 1.$$

Par conséquent,

$$VXp(x) = p(\frac{x}{\lambda}) * X\mathbf{1},\ \forall\ p \in \mathbb{C}[X]. \tag{5.4}$$

Supposons dans un premier temps que $\lambda \in \mathbb{C}\backslash[0,\infty[$ et posons $K = [0,1] \cup [0, \frac{1}{\lambda}]$. Soit f une fonction appartenant à $L^2[0,1]$, alors f peut être considérée comme un élément de $L^2(K)$, si l'on pose $f_{|]0,1/\lambda]} = 0$, $p.\ p.$ D'après le théorème 2.15, il existe une suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}[X]$ qui converge vers f dans $L^2(K)$. Ainsi,

$$VXf(x) = \lim_{n\to\infty} VXp_n(x) = \lim_{n\to\infty} p_n(\frac{x}{\lambda}) * X\mathbf{1} = 0,\ p.\ p.\ t \in [0,1],$$

d'où $VX = 0$. Or V est injectif, de fait $X = 0$. Par conséquent $\sigma_{ext}(T) \subset]0,\infty[$.

Supposons maintenant que $\lambda \in]0,1]$, alors l'équation (5.4) implique que

$$VXf(\lambda x) = \mathcal{K}_{X\mathbf{1}} f(x),$$

pour tout $f \in L^2[0,1]$. En appliquant, sur les deux membres, l'opérateur $\frac{d}{dx}$ à gauche, on obtient que

$$XC_\lambda f = \mathcal{D}_{X\mathbf{1}} f,$$

pour tout $f \in L^2[0,1]$, de fait $XC_\lambda = \mathcal{D}_{X\mathbf{1}}$. Pour compléter la preuve de (1), il suffit de montrer que si $XC_\lambda = \mathcal{D}_{X\mathbf{1}}$, alors $VX = \lambda XV$. Soit $p \in \mathbb{C}[X]$, notons d'abord que $V\mathcal{D}_{X\mathbf{1}} = \mathcal{D}_{X\mathbf{1}} V$, alors

$$\begin{aligned}
VXp(x) &= VXC_\lambda C_{1/\lambda} p(x) \\
&= V\mathcal{D}_{X\mathbf{1}} C_{1/\lambda} p(x) = V\mathcal{D}_{X\mathbf{1}} p(x/\lambda) \\
&= \mathcal{D}_{X\mathbf{1}} Vp(x/\lambda) = XC_\lambda Vp(x/\lambda) \\
&= XC_\lambda(x \circledast p(x/\lambda)) = \lambda XC_\lambda(x/\lambda \circledast p(x/\lambda)) \\
&= \lambda XC_\lambda(Vp)(x/\lambda) = \lambda XVp(x).
\end{aligned}$$

La densité de $\mathbb{C}[X]$ dans $L^2[0,1]$ implique l'équation désirée.

En ce qui concerne (2), si $\lambda \in]1,\infty]$, l'équation (5.4) implique que

$$VXf(x) = \mathcal{K}_{X\mathbf{1}} C_{1/\lambda} f(x),$$

pour tout $f \in L^2[0,1]$. En appliquant, sur les deux membres, l'opérateur $\frac{d}{dx}$ à gauche, on obtient que

$$Xf = \mathcal{D}_{X\mathbf{1}} C_{1/\lambda} f,$$

pour tout $f \in L^2[0,1]$, de fait $X = \mathcal{D}_{X\mathbf{1}} C_{1/\lambda}$. Réciproquement, supposons que $X = \mathcal{D}_{X\mathbf{1}} C_{1/\lambda}$, et montrons que $VX = \lambda XV$. Soit $f \in L^2[0,1]$, alors

$$\begin{aligned}
\lambda XVf(x) &= \lambda \mathcal{D}_{X\mathbf{1}} C_{1/\lambda} Vf(x) \\
&= \lambda \mathcal{D}_{X\mathbf{1}} (Vf)(x/\lambda) = \lambda X\mathbf{1} \circledast (Vf)(x/\lambda) \\
&= \lambda X\mathbf{1} \circledast (x/\lambda \circledast f(x/\lambda)) = \lambda(x/\lambda \circledast (X\mathbf{1} \circledast f(x/\lambda))) \\
&= x \circledast \mathcal{D}_{X\mathbf{1}} C_{1/\lambda} f(x) = V \mathcal{D}_{X\mathbf{1}} C_{1/\lambda} f(x) \\
&= VXf(x).
\end{aligned}$$

Ainsi, la preuve est achevée. □

Dans la suite, on va utiliser le dernier théorème pour montrer l'existence d'un opérateur compact quasinilpotent dont le spectre étendu est réduit au singleton $\{1\}$. Pour cela, on aura besoin de trouver le spectre étendu du shift bilatéral à poids. Ensuite, on va utiliser un théorème de C. Apostol que l'on énoncera plus loin.

Définition 5.8. *Soit $\omega = (\omega_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ une suite de $\ell^\infty(\mathbb{Z})$. On appelle shift bilatéral, et on le note par S_ω l'opérateur défini sur $\ell^2(\mathbb{Z})$ par*

$$S_\omega e_n = \omega_n e_{n-1}, \quad \forall n \in \mathbb{Z},$$

où (e_n) est la base canonique de $\ell^2(\mathbb{Z})$.

Maintenant, si l'on note par

$$\beta(m,n) = \prod_{j=m}^{n} \omega_j, \quad si \quad m \leq n, \quad et \quad \beta(n+1,n) = 1, \quad \forall m,n \in \mathbb{Z},$$

on peut montrer la proposition suivante.

Proposition 5.9. *Soit S_ω un shift bilatéral à poids $\omega = (\omega_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de $\ell^\infty(\mathbb{Z})$, et supposons que $\omega_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Alors $0 \notin \sigma_{ext}(T)$, et de plus $(\lambda \neq 0) \in \sigma_{ext}(S_\omega)$ si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{Z}_+$ tel que la suite $(\lambda^{-n}\beta(n-k+1,n))_{n\in\mathbb{Z}}$ soit bornée.*

Pour la preuve de cette proposition, on renvoie à [45].

Remarque 5.10. *Si $\lambda \in \mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C}, \quad |z| = 1\}$, alors il existe toujours $(k = 0) \in \mathbb{Z}_+$, tel que la suite $(\lambda^{-n}) = (\lambda^{-n}\beta(n+1,n))$ est bornée par 1, et d'après la proposition précédente, $\mathbb{T} \subset \sigma_{ext}(T)$, pour tout shift bilatéral T à poids $w \in \ell^\infty(\mathbb{Z})$. En plus, on a le corollaire suivant.*

Corollaire 5.11. *Soit H un espace de Hilbert séparable de dimension infinie. Alors, il existe un opérateur compact quasinilpotent $T \in \boldsymbol{L}(H)$, injectif et à image dense tel que*

$$\sigma_{ext}(T) = \mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C}, \quad |z| = 1\}.$$

Démonstration. Puisque tous les espaces de Hilbert séparables et de dimension infinie sont isomorphes, on peut considérer l'espace $\ell^2(\mathbb{Z})$, et l'opérateur shift bilatéral à poids $\omega = (\omega_n)_{n\in\mathbb{Z}} = ((1+|n|)^{-1})_{n\in\mathbb{Z}}$. Remarquons que pour tout $k \in \mathbb{Z}_+$,

$$\beta(n-k+1,n) \sim (1+|n|)^{-k}, \quad \textit{lorsque} \quad n \to \infty.$$

Alors, pour tout $\lambda \neq 0$ et tout $k \in \mathbb{Z}_+$, la suite $(\lambda^{-n}\beta(n-k+1,n))_{n\in\mathbb{Z}}$ est bornée si et seulement si $|\lambda| = 1$. Il résulte de la proposition 5.9 que $\sigma_{ext}(T) = \mathbb{T}$.

Il est clair que T est compact, injectif et à image dense. Soit maintenant $k \in \mathbb{Z}_+$ un entier pair assez grand, i.e. $k = 2m$ avec $m \in \mathbb{Z}_+$. Alors

$$T^k e_n = \beta(n-k+1,n)e_{n-k} \quad ,$$

de fait

$$\|T^k\| = \max_{n\in\mathbb{Z}} \beta(n-k+1,n).$$

Si l'on pose $\alpha_n = \beta(n-k+1, n)$, on obtient que

$$\frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}} = \frac{1+|n-k|}{1+|n|}.$$

Par conséquent, $\frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}} \leq 1$ si $n \geq k/2$ et $\frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}} \geq 1$ si $n \leq k/2$. On en déduit que α_n est maximal si $n = [k/2]$, la partie entière de $k/2$, de fait

$$\begin{aligned}\max_{n\in\mathbb{Z}} \beta(n-k+1,n) &= \max_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_n = \alpha_{[k/2]} \\ &= \begin{cases} (m!)^{-2} & \text{avec } m = \frac{k+1}{2} \text{ si } k \text{ est impair,} \\ (m!(m+1)!)^{-1} & \text{avec } m = \frac{k}{2} \text{ si } k \text{ est pair.} \end{cases}\end{aligned}$$

Il en résulte que

$$\lim_{k\to\infty} \|T^k\|^{\frac{1}{k}} = 0,$$

d'où, T est quasinilpotent et le corollaire est bien prouvé. □

Définition 5.12. *Soit $\Omega(\mathcal{H})$ l'ensemble des opérateurs compacts quasinilpotents définis sur $\mathcal{H}$, muni de la topologie de la norme. Il est facile de montrer que $\Omega(\mathcal{H})$ est un espace métrique complet. Autrement dit, il est fermé dans l'espace de Banach $\mathcal{K}(\mathcal{H})$. En effet, si $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ est non-quasinilpotent, alors T a une valeur propre différente de 0, par conséquent, tous les opérateurs qui sont suffisamment proches de T par rapport à la topologie de la norme, ont une valeur propre différente de 0, et ne peuvent donc pas être quasinilpotents.*

Soit maintenant $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, on définit l'orbite similaire de T par l'ensemble

$$Sim(T) = \{UTU^{-1},\ \ U \ \ est \ \ inversible \ \ dans \ \mathcal{B}(\mathcal{H})\}.$$

Le théorème de C. Apostol (voir [2]) assure la densité de $Sim(T)$ dans $\Omega(\mathcal{H})$, dans le cas où T est non-nilpotent de $\Omega(\mathcal{H})$. Rappelons maintenant qu'un sous-ensemble A d'un espace topologique $\mathcal{X}$ est appelé F_σ (resp. G_δ), s'il est une réunion (resp. intersection) dénombrable d'ensembles fermés (resp. ouverts) de $\mathcal{X}$.

Lemme 5.13. *Soient $\mathcal{X}$ un espace de Banach réflexif et séparable, $A \subset \mathbb{C}$ un F_σ. Alors*

$$M(A) = \{T \in \mathcal{B}(\mathcal{X}), \quad \sigma_{ext}(T) \cap A \neq \emptyset\},$$

est un ensemble F_σ de l'espace $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ muni de la topologie de la norme.

Pour la preuve de cette proposition, on renvoie à nouveau à [45]. Nous pouvons à présent montrer le théorème clé suivant.

Théorème 5.14. *Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert séparable. Alors, l'ensemble $\{T \in \Omega(\mathcal{H}), \quad \sigma_{ext}(T) \neq \{1\}\}$ est un ensemble de Baire de première catégorie dans l'espace métrique complet $\Omega(\mathcal{H})$.*

Démonstration. Soient $A_1 = \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_+^*$, $A_2 = \mathbb{C}\backslash\mathbb{T}$. Il est clair que A_1 et A_2 sont des F_σ dans $\mathbb{C}$. Alors, d'après le lemme précédent, les ensembles

$$M_j = \{T \in \Omega(\mathcal{H}), \quad \sigma_{ext}(T) \cap A_j \neq \emptyset\}, \quad j = 1, 2$$

sont des F_σ dans $\Omega(\mathcal{H})$. D'après le théorème 5.7 et le corollaire 5.11, il existe deux opérateurs $T_1, T_2 \in \Omega(H)$ tels que $\sigma_{ext}(T_1) = \mathbb{R}_+^*$ et $\sigma_{ext}(T_1) = \mathbb{T}$. Comme $\sigma_{ext}(T)$ est un ensemble invariant par similarité, alors $\sigma_{ext}(S) = \mathbb{R}_+^*$, pour tout $S \in Sim(T_1)$, et $\sigma_{ext}(S) = \mathbb{T}$, pour tout $S \in Sim(T_2)$. D'où, $Sim(T_1) \cap M_1 = Sim(T_2) \cap M_2 = \emptyset$. D'après le théorème de C. Apostol, les ensembles $\Omega(H)\backslash M_1$, $\Omega(\mathcal{H})\backslash M_2$ sont des G_δ denses dans $\Omega(\mathcal{H})$. En utilisant le théorème de Baire, on trouve que l'ensemble :

$$(\Omega(\mathcal{H})\backslash M_1) \cap (\Omega(\mathcal{H})\backslash M_2) = \Omega(\mathcal{H})\backslash(M_1 \cup M_2),$$

reste encore un G_δ dense dans l'espace métrique complet $\Omega(\mathcal{H})$. D'où, $M_1 \cup M_2$ est un ensemble de Baire de première catégorie, et d'après la définition de M_1 et de M_2, on obtient le résultat.

□

Le dernier théorème et celui de Baire, nous donnent le théorème essentiel suivant de ce paragraphe.

Théorème 5.15. *Il existe un opérateur compact quasinilpotent $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, dont le spectre étendu est réduit au singleton $\{1\}$.*

5.3 Opérateurs de Cesàro

Dans ce paragraphe, on considère trois opérateurs de Cesàro ; l'opérateur de Cesàro discret C_0, l'opérateur de Cesàro fini C_1 et l'opérateur de Cesàro infini C_∞, définis sur les espaces de Hilbert $\ell^2(\mathbb{N})$, $L^2[0,1]$ et $L^2[0,\infty[$, par

$$(C_0 f)(n) := \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f(k),$$

$$(C_1 f)(x) := \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt,$$

$$(C_\infty f)(x) := \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt.$$

Dans [29], M. Lacruz, F. Léon-Saavedra, S. Petrovic et O. Zabeti ont montré que

$$\sigma_{ext}(C_0) = [1,\infty[, \quad \sigma_{ext}(C_1) =]0,1] \quad et \quad \sigma_{ext}(C_\infty) = \{1\}.$$

Dans la suite, on va rétablir les deux dernières égalités en utilisant nos résultats des chapitres précédents. De plus, on décrit complètement les sous espaces propres étendus des opérateurs C_1 et C_∞. Ces résultats sont issus d'une collaboration avec le Professeur Gilles Cassier (cf. [11]). Dans ce dernier article, on établit aussi des résultats liés à l'opérateur C_0.

Avant de commencer, on donne la remarque suivante.

Remarque 5.16. *Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert, et T un opérateur injectif de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Alors $\sigma_{ext}(T^*) = \{1/\bar{\lambda} : \lambda \in \sigma_{ext}(T)\}$. De plus, pour tout $\lambda \in \sigma_{ext}(T)$, $E_{ext}(T,\lambda) = \{X^* : X \in E_{ext}(T^*, 1/\bar{\lambda}\}$.*

Dans [8], A. Brown, P. R. Halmos et A. L. Shields ont montré que l'opérateur de Cesàro C_1 est bien un opérateur de $\mathcal{B}(L^2[0,1])$, et que $I - C_1^*$ est unitairement équivalent à un shift unilatéral de multiplicité 1. Considérons alors le shift unilatéral défini sur l'espace de Hardy H^2 ; c'est à dire l'opérateur $f \mapsto zf$. Pour déterminer $\sigma_{ext}(C_1)$ et les sous espaces propres étendus associés à chaque valeur de ce dernier ensemble, il suffit d'après les remarques 5.1 et 5.16 de trouver les mêmes ensembles correspondant à l'opérateur $I-S$. Tout d'abord, on rappelle quelques résultats liés à la mesure de Carleson. Soit $X := C_{\phi,\varphi}$ un opérateur de composition à poids, défini sur l'espace de Hardy H^2, c'est-à-dire l'opérateur $f \mapsto \phi(f \circ \varphi)$. Si l'on définit la mesure $\mu_{\phi,\varphi}$ sur tout borélien $E \subset \mathbb{D}$ par

$$\mu_{\phi,\varphi}(E) = \int_{\varphi^{-1}(E)\cap\mathbb{T}} |\phi|^2 dm.$$

Alors, M. D. Contreras et A. G. Hernández-Díaz ont montré dans [13] que X est borné sur H^2 si et seulement si $\mu_{\phi,\varphi}$ est une mesure de Carleson. Alors on montre le lemme suivant.

Lemme 5.17. *Soient $\phi \in H^2$, $\lambda \in]1,\infty[$, et $\varphi(z) = \frac{z+\lambda-1}{\lambda}$, alors l'opérateur $X = C_{\phi,\varphi}$ est borné sur H^2 si et seulement si*

$$\sup_{\alpha\in\mathbb{D}} \frac{1-|\alpha|}{1-Re(\alpha)} P_\beta(|\phi|^2) < +\infty, \tag{5.5}$$

où $\beta = \frac{\alpha}{(1-\alpha)\lambda+\alpha}$ et P_β est le noyau de Poisson au point β.

Démonstration. On a par construction de la mesure $\mu_{\phi,\varphi}$ que

$$\int_{\overline{\mathbb{D}}} g d\mu_{\phi,\varphi} = \int_{\mathbb{T}} |\phi|^2 (g\circ\varphi) dm.$$

D'après [23], $\mu_{\phi,\varphi}$ est une mesure de Carleson si et seulement si

$$\sup_{\alpha\in\overline{\mathbb{D}}} \int_{\overline{\mathbb{D}}} \frac{1-|\alpha|^2}{|1-\overline{\alpha}z|^2} d\mu_{\phi,\varphi} < +\infty.$$

Par conséquent, l'opérateur X est borné si et seulement si

$$\sup_{\alpha\in\overline{\mathbb{D}}} \int_{\mathbb{T}} |\phi(e^{it})|^2 \frac{1-|\alpha|^2}{|1-\overline{\alpha}\varphi(e^{it})|^2} dm < +\infty.$$

En remplaçant φ par sa valeur, on obtient par calcul simple que cette dernière condition est équivalente à

$$\sup_{\alpha\in\overline{\mathbb{D}}} \frac{(1-|\alpha|^2)\lambda^2}{|(1-\overline{\alpha})\lambda+\overline{\alpha}|^2} P_\beta(|\phi|^2) < +\infty.$$

En mettant $\gamma = \lambda - 2$, on obtient la condition suivante

$$\sup_{\alpha \in \overline{\mathbb{D}}} \frac{(1-|\alpha|^2)(2+\gamma)}{2(1-Re(\alpha)) + \gamma|1-\alpha|^2} P_\beta(|\phi|^2) < +\infty.$$

Or

$$\frac{(1-|\alpha|^2)(2+\gamma)}{2(1-Re(\alpha)) + \gamma|1-\alpha|^2} = \frac{1+|\alpha|}{2+\gamma\frac{|1-\alpha|^2}{1-Re(\alpha)}} \frac{1-|\alpha|}{1-Re(\alpha)},$$

et on laisse au lecteur de vérifier que

$$\frac{1+|\alpha|}{2+\gamma\frac{|1-\alpha|^2}{1-Re(\alpha)}}$$

est borné sur $\mathbb{D}$, pour tout $\gamma \in]-1, \infty]$. D'où le résultat. □

On aura aussi besoin du lemme suivant.

Lemme 5.18. *Soit* $z \in \overline{\mathbb{D}}$*, alors* $\left|\frac{z+\lambda-1}{\lambda}\right| \leq 1$ *si et seulement si* $\lambda \in [1, \infty[$.

Démonstration. Si $\lambda \in [1, \infty[$, alors pour tout $z \in \overline{\mathbb{D}}$,

$$\left|\frac{z+\lambda-1}{\lambda}\right| \leq \left|\frac{z}{\lambda}\right| + \frac{\lambda-1}{\lambda} \leq 1.$$

Réciproquement, supposons que $\left|\frac{z+\lambda-1}{\lambda}\right| \leq 1$ pour tout $z \in \overline{\mathbb{D}}$, et posons $\lambda = |\lambda|e^{i\omega}$. Alors, pour tout $z \in \overline{\mathbb{D}}$

$$\left|z + |\lambda|e^{i\omega} - 1\right| \leq |\lambda|,$$

équivalent à

$$\left|ze^{-i\omega} + |\lambda| - e^{-i\omega}\right| \leq |\lambda|,$$

pour tout $z \in \overline{\mathbb{D}}$. En particulier, si $z = e^{i\omega}$, alors

$$\left||\lambda| + 1 - e^{-i\omega}\right| \leq |\lambda|. \tag{5.6}$$

Posons $\beta := 1 - e^{-i\omega}$. Une représentation géométrique dans le plan complexe montre clairement que l'inégalité (5.6) implique que soit $Re(\beta) < 0$, soit $\beta = 0$. Or, $Re(\beta) = 1 - \cos(\omega) \geq 0$. Donc nécessairement $\beta = 0$. D'où $\lambda = |\lambda| \in [0, \infty[$. Par conséquent, $|z + \lambda - 1| \leq \lambda$ pour tout $z \in \overline{\mathbb{D}}$. En remplaçant $z = -1$ on obtient le résultat. □

A l'aide de ces deux derniers lemmes, on peut montrer le théorème principal de ce paragraphe.

Théorème 5.19. *Soit S le shift unilatéral défini sur l'espace de Hardy H^2, alors $\sigma_{ext}(I-S)=[1,\infty[$. De plus*

1. *Si $\lambda>1$, alors $X\in E_{ext}(\lambda)$ si et seulement s'il existe une fonction $\phi\in H^2$ vérifiant la condition (5.5), telle que*
$$Xf(z)=\phi(z)f(\frac{z+\lambda-1}{\lambda}),\quad \forall z\in\mathbb{D}.$$
2. *Si $\lambda=1$, alors $X\in E_{ext}(1)$ si et seulement s'il existe une fonction $\phi\in H^\infty$ telle que $X=M_\phi$.*

Démonstration. Soit $\lambda\in[1,\infty[$, on trouve alors facilement que pour tout ϕ de H^2 (de H^∞ lorsque $\lambda=1$) vérifiant la condition (5.5), l'opérateur X défini dans les deux assertions du théorème, est une solution de l'équation $(I-S)X=\lambda X(I-S)$, appartenant à $\mathcal{B}(H^2)$ (d'après les deux lemmes précédents).

Montrons alors la réciproque. Remarquons d'abord que l'opérateur $(I-S)$ est injectif, donc $\lambda=0$ ne peut pas être dans $\sigma_{ext}(I-S)$. Supposons maintenant que $X\in\mathcal{B}(H^2)$ vérifie l'équation $(I-S)X=\lambda X(I-S)$, avec $\lambda\in\mathbb{C}^*$. Cela implique que
$$XS=\left(\frac{S+\lambda-1}{\lambda}\right)X,$$
Ainsi
$$XS^n=\left(\frac{S+\lambda-1}{\lambda}\right)^nX,\quad \forall n\in\mathbb{N}.$$
Cette dernière relation signifie que
$$XS^nf=\left(\frac{S+\lambda-1}{\lambda}\right)^nXf,\quad \forall f\in H^2\ \ et\ \ \forall n\in\mathbb{N}.$$
En particulier, si $f=\mathbf{1}$, on obtient
$$Xz^n=\left(\frac{z+\lambda-1}{\lambda}\right)^nX\mathbf{1},\quad \forall n\in\mathbb{N}.$$

En posant $X\mathbf{1} = \phi$, la dernière équation implique

$$Xp(z) = \phi(z)p(\frac{z+\lambda-1}{\lambda}), \quad \forall p \in \mathbb{C}[X].$$

Si $\lambda = 1$ on obtient immédiatement le résultat. Sinon, notons par $\|X\| = c$ alors

$$\|\phi(z)p(\frac{z+\lambda-1}{\lambda})\| \leq c^2,$$

d'où, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$ que

$$\int_{\mathbb{T}} \left|\frac{z+\lambda-1}{\lambda}\right|^{2n} |\phi|^2 dm(z) \leq c^2.$$

Considérons $\Omega := \{z \in \mathbb{T} : |\frac{z+\lambda-1}{\lambda}| > 1\}$, et supposons que $m(\Omega) > 0$, alors forcément $\phi|_\Omega = 0$. Or $\phi \in H^2$, donc $\phi = 0$ et par suite $X = 0$. Par conséquent, si $X \neq 0$ alors $m(\Omega) = 0$, et par continuité $|\frac{z+\lambda-1}{\lambda}| \leq 1$ pour tout $z \in \mathbb{T}$. D'après le lemme précédent, $\lambda \in]1, \infty[$ et pour tout $f \in H^2$,

$$Xf(z) = \phi(z)f(\frac{z+\lambda-1}{\lambda}), \quad \forall z \in \mathbb{D}.$$

Enfin, pour que X soit borné, il faut que ϕ vérifie la condition (5.5). Ainsi, le théorème est bien prouvé. □

D'après les remarques 5.1 et 5.16, $\sigma_{ext}(C_1) =]0, 1]$. Enfin, on applique les résultats du chapitre précédent pour déterminer le spectre étendu de l'opérateur C_∞. En effet, Dans [8] A. Brown, P. R. Halmos et A. L. Shields ont montré que l'opérateur de Cesàro C_∞ est un opérateur de $\mathcal{B}(L^2[0, \infty[)$, et que $I - C_\infty^*$ est unitairement équivalent à un shift bilatéral de multiplicité 1. Considérons alors le shift bilatéral U défini sur l'espace de Hilbert $\ell^2(\mathbb{Z})$. D'après les remarques 5.1 et 5.16, pour déterminer $\sigma_{ext}(C_\infty)$ et les sous espaces propres étendus associés à chaque valeur de ce dernier ensemble, il suffit de trouver $\sigma_{ext}(I - U)$ et $E_{ext}(\lambda)$ pour tout $\lambda \in \sigma_{ext}(I - U)$. On montre alors le théorème suivant.

Théorème 5.20. *Soit U le shift unilatéral défini sur l'espace de Hilbert $\ell^2(\mathbb{Z})$, alors $\sigma_{ext}(I-U) = \{1\}$ et $X \in E_{ext}(1)$ si et seulement s'il existe une suite $(\alpha_i) \in \ell^2(\mathbb{Z})$ (suite des coefficients de Fourier d'une fonction de $L^\infty(\mathbb{T})$), telle que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $Xe_n = (\alpha_{i-n})$.*

Démonstration. Il est connu que $\sigma(I-U)$ est égale au cercle centré en 1 et de rayon 1. Par conséquent, pour tout $\lambda \neq 0$, l'intersection de $\sigma(I-U)$ et $\sigma(\lambda(I-U))$ est au plus égale à deux points distincts (zéro et un autre point sur le cercle mentionné ci-dessus). Autrement dit, si l'on note par E la mesure spectrale de l'opérateur $(I-U)$, alors pour tout borélien $\Delta \in \mathcal{B}or(\sigma(I-U) \cap \sigma(\lambda(I-U)))$, $E(\Delta) = 0$. D'après le théorème 4.11, on obtient alors $\sigma_{ext}(I-U) = \{1\}$. L'obtention de $X \in E_{ext}(1)$ est triviale et sera laissée au lecteur. $\square$

Ainsi, D'après les remarques 5.1 et 5.16, $\sigma_{ext}(C_\infty) = \{1\}$.

Bibliographie

[1] Hasan Alkanjo. On extended eigenvalues and extended eigenvectors of truncated shift. *Concrete Operators*, 1 :19–27, 2013.

[2] Constantin Apostol. Universal quasinilpotent operators. *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.*, 25(2) :135–138, 1980.

[3] Hari Bercovici. *Operator theory and arithmetic in H^∞*, volume 26 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1988.

[4] Animikh Biswas, Alan Lambert, and Srdjan Petrovic. Extended eigenvalues and the Volterra operator. *Glasg. Math. J.*, 44(3) :521–534, 2002.

[5] Animikh Biswas and Srdjan Petrovic. On extended eigenvalues of operators. *Integral Equations Operator Theory*, 55(2) :233–248, 2006.

[6] Paul S. Bourdon and Joel H. Shapiro. Intertwining relations and extended eigenvalues for analytic Toeplitz operators. *Illinois J. Math.*, 52(3) :1007–1030, 2008.

[7] Arlen Brown and P. R. Halmos. Algebraic properties of Toeplitz operators. *J. Reine Angew. Math.*, 213 :89–102, 1963/1964.

[8] Arlen Brown, P. R. Halmos, and A. L. Shields. Cesàro operators. *Acta Sci. Math. (Szeged)*, 26 :125–137, 1965.

[9] Arlen Brown, P. R. Halmos, and A. L. Shields. Cesàro operators. *Acta Sci. Math. (Szeged)*, 26 :125–137, 1965.

[10] Scott Brown. Connections between an operator and a compact operator that yield hyperinvariant subspaces. *J. Operator Theory*, 1(1) :117–121, 1979.

[11] G. Cassier and H. Alkanjo. Extended eigenvalues and extended eigenvectors for some subnormal operators. *(En préparation).*

[12] G. Cassier and H. Alkanjo. Extended spectrum, extended eigenspaces and normal operators. *J. Math. Anal. Appl*, 418(1) :305–316, 2014.

[13] Manuel D. Contreras and Alfredo G. Hernández-Díaz. Weighted composition operators on Hardy spaces. *J. Math. Anal. Appl.*, 263(1) :224–233, 2001.

[14] John B. Conway. *Functions of one complex variable. II*, volume 159 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1995.

[15] John B. Conway. *A course in operator theory*, volume 21 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2000.

[16] Carl C. Cowen. The commutant of an analytic Toeplitz operator. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 239 :1–31, 1978.

[17] Carl C. Cowen. Commutants of analytic Toeplitz operators with automorphic symbol. In *Hilbert space operators (Proc. Conf., Calif. State Univ., Long Beach, Calif., 1977)*, volume 693 of *Lecture Notes in Math.*, pages 71–75. Springer, Berlin, 1978.

[18] James A. Deddens. Intertwining analytic Toeplitz operators. *Michigan Math. J.*, 18 :243–246, 1971.

[19] James A. Deddens. Analytic Toeplitz and composition operators. *Canad. J. Math.*, 24 :859–865, 1972.

[20] James A. Deddens and Tin Kin Wong. The commutant of analytic Toeplitz operators. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 184 :261–273, 1973.

[21] I. Yu. Domanov and M. M. Malamud. On the spectral analysis of direct sums of Riemann-Liouville operators in Sobolev spaces of vector functions. *Integral Equations Operator Theory*, 63(2) :181–215, 2009.

[22] Nelson Dunford and Jacob T. Schwartz. *Linear operators. Part I.* Wiley Classics Library. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1988. General theory, With the assistance of William G. Bade and Robert G. Bartle, Reprint of the 1958 original, A Wiley-Interscience Publication.

[23] John B. Garnett. *Bounded analytic functions*, volume 236 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, first edition, 2007.

[24] Paul Richard Halmos. *A Hilbert space problem book*, volume 19 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York-Berlin, second edition, 1982. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 17.

[25] M. T. Karaev. On extended eigenvalues and extended eigenvectors of some operator classes. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 134(8) :2383–2392 (electronic), 2006.

[26] H. W. Kim, R. Moore, and C. M. Pearcy. A variation of Lomonosov's theorem. *J. Operator Theory*, 2(1) :131–140, 1979.

[27] T. L. Kriete, III and David Trutt. The Cesàro operator in l^2 is subnormal. *Amer. J. Math.*, 93 :215–225, 1971.

[28] T. L. Kriete, III and David Trutt. The Cesàro operator in l^2 is subnormal. *Amer. J. Math.*, 93 :215–225, 1971.

[29] M Lacruz, M Léon-Saavedra, S Petrovic, and O Zabeti. Extended eigenvalues for Cesàro opeators. *J. Math. Anal. Appl. (En préparation).*

[30] Alan Lambert. Hyperinvariant subspaces and extended eigenvalues. *New York J. Math.*, 10 :83–88, 2004.

[31] V. Lomonosov. Invariant subspaces for operators commuting with compact operators. *J. Operator Theory*, 7(1) :213–214, 1973.

[32] M. M. Malamud. On reproducing subspaces of Volterra operators. *Dokl. Akad. Nauk*, 351(4) :454–458, 1996.

[33] M. M. Malamud. Invariant and hyperinvariant subspaces of direct sums of simple Volterra operators. In *Differential and integral*

operators (Regensburg, 1995), volume 102 of *Oper. Theory Adv. Appl.*, pages 143–167. Birkhäuser, Basel, 1998.

[34] Nikolai K. Nikolski. *Operators, functions, and systems : an easy reading. Vol. 1*, volume 92 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2002. Hardy, Hankel, and Toeplitz, Translated from the French by Andreas Hartmann.

[35] Nikolai K. Nikolski. *Operators, functions, and systems : an easy reading. Vol. 2*, volume 93 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2002. Model operators and systems, Translated from the French by Andreas Hartmann and revised by the author.

[36] N. K. Nikol′skiĭ. *Treatise on the shift operator*, volume 273 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1986. Spectral function theory, With an appendix by S. V. Hruščev [S. V. Khrushchëv] and V. V. Peller, Translated from the Russian by Jaak Peetre.

[37] Pierre Petitcunot. *Problèmes de similarité et spectre étendu d'un opérateur*. Thèse, Université de Lille, 2008.

[38] Srdjan Petrovic. On the extended eigenvalues of some Volterra operators. *Integral Equations Operator Theory*, 57(4) :593–598, 2007.

[39] Marvin Rosenblum. On the operator equation $BX - XA = Q$. *Duke Math. J.*, 23 :263–269, 1956.

[40] Walter Rudin. *Real and complex analysis*. McGraw-Hill Book Co., New York, third edition, 1987.

[41] John V. Ryff. Subordinate H^p functions. *Duke Math. J.*, 33 :347–354, 1966.

[42] Donald Sarason. Free interpolation in the Nevanlinna class. In *Linear and complex analysis*, volume 226 of *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2*, pages 145–152. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009.

[43] Karim Seddighi. Analytic Toeplitz algebras and intertwining operators. *Studia Math.*, 93(3) :241–247, 1989.

[44] Joel H. Shapiro. *Composition operators and classical function theory*. Universitext : Tracts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1993.

[45] Stanislav Shkarin. Compact operators. *Journal of Mathematical analysis and applications*, 2007.

[46] Béla Sz.-Nagy, Ciprian Foias, Hari Bercovici, and László Kérchy. *Harmonic analysis of operators on Hilbert space*. Universitext. Springer, New York, second edition, 2010.

Extended spectrum of operators and applications

Thesis summary

This thesis is based on a relatively new spectral notion, called extended spectrum of operators.

In the first part, we provide general properties of extended spectrum of an operator in some special cases, such as the case of finite dimension and the case of invertible operator.

We focused in the second part on characterizing the extended spectrum of truncated shift operator S_u. In particular, we give a complete description of the extended eigenvectors associated to each extended eigenvalue of S_b, where b is a Blaschke product.

In the third part, we describe the extended spectrum and the extended eigenvectors of a very important class of operators , that is the normal operators. We first start by describing these last sets for the product of a positive and a self-adjoint operator which are both injective. After, we use the Fuglede-Putnam theorem to describe the same sets for normal operators, in terms of their spectral measure.

In the last part, we apply our results from the last three parts on concrete examples. In particular, we address the problem of extended eigenvectors of operators defined in a finite dimension space. Next, we show the existence of a quasinilpotent compact operator whose extended spectrum is reduced to $\{1\}$. Finally, we study two Cesàro operators which are very important in applications.

Keywords

Extended spectrum, extended eigenvalue, extended eigenvector, Hardy space, model space, truncated shift, self-adjoint operator, normal operator, quasinilpotent compact operator, Cesàro operator.